Masterarbeit

Mit dem Thema

Diagnostische Interviews im Mathematikunterricht der Oberstufe

Interviewstudien am Oberstufen-Kolleg Bielefeld im Bereich Gleichungen und Termumformungen

Gutachter: Prof. Dr. Rudolf vom Hofe
Dr. Daniel Frohn

Sommersemester 2012

vorgelegt von Henrik Gebauer
Matrikelnummer: xxxxxxx
E-Mail: henrik.gebauer@uni-bielefeld.de

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mit den Ergebnissen der ersten PISA-Studie wurde deutlich, dass die ökonomische und soziale Situation der Familien von Schülerinnen und Schülern ganz entscheidend für deren Chancen im deutschen Bildungssystem sind. Außerdem führt die Zusammensetzung der Klassen, die nur nach den Kriterien Schulform und Jahrgang erfolgt, zu Klassen mit sehr heterogenen Leistungsniveaus (vgl. Kretschmann 2008, 5), die zudem bei jedem einzelnen Schüler bzw. jeder einzelnen Schülerin von Fach zu Fach variieren. Individuelle Förderung von schwächeren aber auch besonders starken SchülerInnen soll dazu führen, dass jede/r Lernende die individuell bestmögliche Bildung erreichen kann. Dazu müssen Lernergebnisse und -prozesse evaluiert werden und in entsprechenden Maßnahmen münden. Mit der Einführung kompetenzorientierter Bildungsstandards wurden Ziele für den Mathematikunterricht festgelegt und nicht wie zuvor nur die zu behandelnden Inhalte. Die SchülerInnen sollen in die Lage versetzt werden, Probleme aus verschiedenen mathematischen Bereichen zu lösen, d. h. entsprechende *Kompetenzen* erwerben. Auch um dieses Ziel zu erreichen, ist es nötig, Lernstände der einzelnen SchülerInnen zu erheben und entsprechend zu reagieren. Die Diagnose ist dabei das Verfahren, um „Schülerleistungen zu verstehen und einzuschätzen mit dem Ziel, angemessene pädagogische und didaktische Entscheidungen zu treffen." (Hußmann/Leuders/Prediger 2007, 1).

Zur Diagnose gibt es verschiedene Verfahren. Dabei weden zum Beispiel die SchülerInnen im Unterricht beobachtet, Klassenarbeiten analysiert oder Gespräche über Lösungswege geführt. Die Diagnose kann zu Beginn, am Ende oder während einer Lerneinheit erfolgen (vgl. ebd., 2). Ziel ist aber nicht, zu ermitteln, ob eine Aufgabe gelöst werden kann oder nicht, sondern vor allem, warum sie so und nicht anders gelöst wird und welche Ursachen die Schwierigkeiten haben (vgl. ebd., 3). Die reine Erhebung von Antworten nur nach dem Schema richtig/falsch, wie sie beispielsweise in Multiple-Choice-Bögen realisiert wird, kann dieser Anforderung nicht gerecht werden. Wichtig ist, dass auch die Lösungswege dokumentiert werden. Eine Möglichkeit ist die ausdrückliche Aufforderung, den Lösungsweg zu verschriftlichen und Begründungen zu verlangen (vgl. ebd., 4). Eine Methode dazu ist die Aufforderung zum „Lauten Denken" (Wartha/Rottmann/Schipper 2008, 21) und die Beobachtung der/des Lernenden beim Lösen einer Aufgabe. So ist für die Diagnose auch ein Zugang zum Lösungsweg gegeben. Beim diagnostischen Interview werden Aufgaben bearbeitet, wobei der Lösungsweg verbal formuliert werden soll. Der Interviewer bzw. die Interviewerin hat im Gegensatz zu rein schriftlichen Tests mit anschließender Analyse beim Interview die Möglichkeit, Nachfragen zu stellen oder die Aufgaben spontan der Situation anzupassen (vgl. Hafner/vom Hofe 2008, 18). Für das Gelingen der Diagnose spielt nicht nur die Durchführung des Interviews, sondern auch die gestellte Aufgabe eine Rolle (vgl. Sjuts 2008, 60), um Fehlvorstellungen aufzudecken. Beispielsweise sind oft offene Aufgaben, d. h. Aufgaben mit mehreren, nicht vorgegebenen Lösungswegen, sinnvoll (vgl. Brauner 2007, 21).

Das Interview sollte sorgfältig geplant werden. Dazu gehört, dass der Gegenstand der Diagnose, d. h. die zu überprüfenden Kompetenzen, genau festgelegt wird, und geeignete Aufgaben erstellt oder ausgewählt werden. Auch die im Interview gestellten Fragen und Impulse sollten im Vorfeld festgelegt und in einem Interviewleitfaden festgehalten werden. Für zu erwartende Probleme sollte ebenfalls eine Reaktion vorbereitet sein (vgl. Hafner/vom Hofe 2008, 14). Zur Vorbereitung der Interviews ist es sinnvoll, sich mit typischen Fehlerquellen und Fehlvorstellungen im jeweiligen mathematischen Teilgebiet vertraut zu machen. Für die gewählten Aufgaben werden mögliche Schülerlösungen mit verschiedenen Ansätzen erstellt, um herauszuarbeiten, welche Kompetenzen zur Lösung der Aufgabe benötigt werden (vgl. ebd., 16). Während der Interviews werden auch die verbalen Antworten notiert oder optimalerweise technisch aufgezeichnet, und in die Analyse einbezogen. Bei der Analyse des Interviews wird versucht, die Lösungswege nachzuvollziehen und die Ursachen für Fehler zu benennen. Wenn Interviews mit mehreren SchülerInnen durchgeführt wurden, können auch Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen verschiedenen Lösungen untersucht werden (vgl. ebd., 17).

Die Ergebnisse einer Diagnose sind Grundlage für gezielte Fördermaßnahmen. Eine Diagnose ohne anschließende Förderung kann sogar kontraproduktiv sein, weil sie den getesteten Lernenden ihre Defizite bewusst werden lässt, aber keine Hilfe anbietet (vgl. Kretschmann 2008, 7). Im Förderplan werden individuelle, eng gefasste Ziele und Maßnahmen für einem festen Zeitraum festgeschrieben, um Transparenz und Sinnhaftigkeit des Unterrichts darzustellen und die damit verbundene Lernmotivation und Lernerfolge spürbar zu machen (vgl. Klenck/Schneider 2008, 9f.). Diagnostizieren und Fördern ist besonders wichtig für Inhalte, die längst Voraussetzung für die eigentlichen, aktuellen Unterrichtsinhalte sind (vgl. ebd., 9), damit kein weiteres Abrutschen erfolgt.

Für die vorliegende Arbeit werden Diagnoseinterviews am Oberstufen-Kolleg im Bereich Algebra der Sekundarstufe I entwickelt, durchgeführt und analysiert. Im Anschluss werden geeignete Fördermaßnahmen vorgeschlagen. Es geht also um KollegiatInnen, die Probleme mit Termumformungen und dem Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen haben, d. h. mit Inhalten, die in dieser Jahrgangsstufe Voraussetzungen für den Mathematikunterricht sind. Die Arbeit untersucht die Frage, welche Ursachen die Schwierigkeiten der jeweiligen SchülerInnen haben und welche Fördermöglichkeiten es gibt. Ziel ist auch die Entwicklung von geeigneten Aufgaben für die gewählte Methode. Vor allem aber soll die Methode der diagnostischen Interviews, die hauptsächlich für die Grundschule und die Erprobungsphase der Sekundarstufe I erforscht ist, unter den Bedingungen der Oberstufe erprobt und untersucht werden.

Zur Vorbereitung der Interviews werden typische Fehler und Schwierigkeiten von SchülerInnen im Umgang mit Termen und Gleichungen dargestellt. Wichtige Quellen von Problemen sind die mathematische Notation, psychologische Aspekte wie Assoziationen und lückenhafte Grundlagen, auf die weitere Kompetenzen aufgebaut werden.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen und Gruppen bedanken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben. An erster Stelle danke ich den KollegiatInnen, mit denen ich die Interviews führen konnte. Namentlich hervorheben möchte ich außerdem Gabriele Klewin, die mir die Auswertung der Eingangsdiagnose ermöglichte. Ich danke den LehrerInnen in der Projektwoche, die mir die Vorstellung der Arbeit ermöglichten, insbesondere Ian Voß für das Zeigen der Örtlichkeiten. Ein herzlicher Dank gilt meinen Eltern, dem Studienfonds OWL und der Studienstiftung des deutschen Volkes, die mir ein sorgenfreies Studium ermöglicht haben.

1 Individuelle Förderung im Mathematikunterricht

Ursachen für Schwierigkeiten im Mathematikunterricht der Sekundarstufe werden noch nicht lange untersucht (vgl. Wartha 2009, 159), und die wenigen Studien beschränken sich meist auf die Sekundarstufe II. Die meisten Veröffentlichungen beziehen sich auf die Grundrechenarten in der Primarstufe. Bis in die 1960er Jahre wurden Fehleranalysen nur im Bereich der Arithmetik durchgeführt (vgl. Radatz 1980, 16). Auch Fehlerursachen werden erst seit ca. 1950 untersucht, bis dahin wurden fast ausschließlich Fehlerhäufigkeiten gezählt und die Fehler kategorisiert (vgl. ebd., 22). Hauptanliegen der früheren Fehleranalysen war es, Änderungen im Lehrplan wissenschaftlich zu begleiten (vgl. ebd.). Eine auf den einzelnen Schüler zugeschnittene Diagnose mit dem Ziel einer individuellen Förderung war also nicht das Anliegen dieser Analysen.

Verschiedene Studien zeigen, dass Fehler von älteren SchülerInnen häufig auf Fehlvorstellungen beruhen, die sie aus der Grundschulzeit haben (vgl. Moser Opitz 2005, 114). Bereits beim Übergang von der Grundschule zum Gymnasium bestehen oft große Abweichungen zwischen den in der Grundschule behandelten und den von den SchülerInnen beherrschten Inhalten (vgl. Wartha 2009, 160). Es ist naheliegend, dass auch Schwierigkeiten in der Oberstufe zu einem großen Teil Ursachen in früheren Schuljahren haben. Wie sich in den Interviews am Oberstufen-Kolleg zeigt, kann insbesondere die Bruchrechnung eine Hürde darstellen.

Von den wenigen vorliegenden Studien untersuchen die meisten allerdings die typischen Fehler zu einem spezifischen Fachgebiet in einem bestimmten Jahrgang. Es gibt kaum Längsschnittstudien zu mathematischen Kompetenzen in der Sekundarstufe I, die darüber Aufschluss geben könnten, ob sich Schwierigkeiten in höheren Klassen bereits früh abzeichnen. Durch den über Jahre hinweg aufeinander aufbauenden Charakter vieler Sachverhalte in der Schulmathematik ist aber anzunehmen, dass Versäumnisse in früheren Jahrgängen zu Versäumnissen in späteren Klassenstufen führen. Die SchülerInnen werden „abgehängt". Eine der wenigen durchgeführten Studien ist die PALMA-Studie (*Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik*), bei der die Entwicklung verschiedener mathematische Kompetenzen über die gesamte Sekundarstufe I hinweg untersucht wurde (vgl. vom Hofe et al. 2009, 125). Von 2002 bis 2007 bearbeiteten die ausgewählten SchülerInnen immer wieder Aufgaben, wobei repräsentativ ausgewählte TeilnehmerInnen der PALMA-Studie auch an der PISA-Erhebung 2006 teilnahmen (vgl. ebd., 126). Getestet wurde bei PALMA – wie auch bei PISA – die sogenannte „mathematical literacy": Mathematik soll als Werkzeug zum Problemlösen verstanden und als solches genutzt werden, nicht als Sammlung von Algorithmen (vgl. ebd., 127). Dazu wurde der „Regensburger Mathematikleistungstest" entwickelt, der als kompetenzorientierter Test die Bereiche Modellbildung und Kalküle verbindet. Die Aufgaben stammen aus den Bereichen Arithmetik, Algebra und Geometrie (vgl. ebd., 130). Neben dem Abschneidenbei den Aufgaben wurden auch andere Faktoren wie das Elternhaus, Anstrengungsbereitschaft usw. erhoben, um Beziehungen zwischen diesen Faktoren aufdecken zu können (vgl. ebd., 132). Ein Ergebnis der Studie war, dass sich „etwa die Hälfte aller analysierten

Schüler-Fehler auf unvollständig ausgebildete oder fehlende Grundvorstellungen zurückführen" (ebd., 143) lässt. Eine detailliertere Darstellung typischer Schülerfehler in Bezug auf Gleichungen und Termumformungen erfolgt in Kapitel 2.2.

1.1 Begründung der individuellen Förderung

Die Lebenswelten von Jugendlichen können sich in vielerlei Hinsicht voneinander unterscheiden. Für die Schule wichtige Faktoren sind unter anderem das Geschlecht (Gender), der Migrationshintergrund, der bisherige Bildungsweg, das soziokulturelle Umfeld und die familiäre Situation (vgl. Boller et al. 2008a, 65ff.). Diese Unterschiede spiegeln sich auch in völlig unterschiedlichen Bedürfnissen der SchülerInnen im Hinblick auf den Unterricht wider. Die Schule muss diese Voraussetzungen im Blick haben und ein entsprechend breit gefächertes Angebot bereit halten, um Chancengleichheit zu ermöglichen. Die Ergebnisse von internationalen Vergleichsstudien wie den PISA-Studien zeigten aber, dass die deutsche Schullandschaft, die hauptsächlich durch die Zuordnung der SchülerInnen zu verschiedenen Schulformen differenziert, diesem Anspruch nicht gerecht wird. Stattdessen zeigte die Studie, dass vor allem der soziale und ökonomische Hintergrund einer Schülerin bzw. eines Schülers einen hohen Einfluss auf die Bildungschancen hat. In der sich anschließenden Diskussion wurde häufig eine verbesserte individuelle Förderung gefordert, um diesem Zustand zu begegnen (vgl. Boller et al. 2008b, 170).

Dabei soll auf die Heterogenität der Schülerschaft mit einer Anpassung des Unterrichts an die individuellen Unterschiede geantwortet werden (vgl. ebd., 171). Individuelle Förderung soll es im Idealfall allen SchülerInnen ermöglichen, das für sich persönlich Erreichbare auch zu erreichen, d. h. SchülerInnen sollen die Möglichkeit haben, „ihre Stärken entfalten und ihre Schwächen kompensieren" (Meyer 2004, 97, zit. n. Bathe et al. 2008, 40) zu können. Somit wird vor allem der Heterogenität im Hinblick auf die Leistung Rechnung getragen. Ein Unterricht, der sich ausschließlich am Mittelmaß orientiert, überfordert schwächere und unterfordert stärkere Schülerinnen und Schüler (vgl. Büchter/Leuders 2005, 103). Individuelle Förderung soll aber nicht nur besonders starke oder besonders schwache Lernende ansprechen, sondern alle SchülerInnen (vgl. Gasse 2006). Sie soll nicht nur Schwächen ausgleichen und Stärken fördern, sondern z. B. auch unterschiedlichen methodischen Bedürfnissen gerecht werden. Mögliche Mittel der individuellen Förderung sind unter anderem individuelle Lernziele bzw. die Ermöglichung unterschiedlicher Wege zum Erreichen eines allgemeinen Lernziels, individuelle Hilfestellungen, Beratungen und Fördermöglichkeiten (vgl. Boller et al. 2008a, 74).

Gerade der Mathematikunterricht muss sich nicht nur hinsichtlich unterschiedlicher Vorerfahrungen und Lebenswelten an den Lernenden orientieren, sondern auch berücksichtigen, dass die Schülerinnen und Schüler einen unterschiedlichen kognitiven Zugang zu mathematischen Inhalten haben können. Malle (1993) unterscheidet dabei logisch-formales von konkret-anschaulichem Denken (vgl. ebd., 129f.). Während Ersteres auf dem strikten, widerspruchsfreien Anwenden von Regeln und logischen Schlussfolgerungen beruht, verbindet Letzteres jede mathematische Operation mit einer anschaulichen Vorstellung. Der Unterricht muss beiden Denkarten und allen denkbaren Mischformen gerecht werden und ein entsprechend breites Angebot bieten. Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, dass auch das Alter der SchülerInnen in die Planung des Unterrichts einbezogen wird (vgl. Vollrath 2001, 92).

Die Orientierung des Unterrichts an den SchülerInnen und die frühe Erkennung von Schwierigkeiten setzen Diagnosen im Unterricht voraus (vgl. Horstkemper 2006, 6; vgl. Jordan/vom Hofe 2008, 4). Diagnosen finden optimalerweise nicht nur zu festgelegten Zeitpunkten statt, sondern begleiten den Unterricht (vgl. Horstkemper 2006, 4). Diagnosen mit pädagogischen Interviews, wie sie hier durchgeführt werden, sind somit auf dem Unterricht aufbauende und den Unterricht erweiternde Maßnahmen und können dann zum Einsatz kommen, wenn die alltägliche Diagnostik im Unterricht eine genauere Untersuchung sinnvoll erscheinen lässt, um Förderung anzubieten. LehrerInnen müssen entsprechend für diese Aufgabe qualifiziert werden (vgl. Boller et al. 2008a, 74; vgl. Bathe et al. 2008, 41). Dabei soll der Fokus aber nicht nur darauf liegen, Defizite im Vergleich zum Lehrplan festzustellen und zu analysieren (vgl. Scherer 1999, 170), sondern auch darin, vorhandene Kompetenzen oder besondere Stärken zu ermitteln. Für den Mathematikunterricht bedeutet das, dass es sinnvoll ist, vor der Behandlung neuer mathematischer Inhalte in Erfahrung zu bringen, was die SchülerInnen schon können, um darauf aufbauen zu können. Dies ist auch sinnvoll im Hinblick darauf, dass nicht immer davon ausgegangen werden kann, dass für frühere Jahrgänge vorgesehene Kompetenzen vorhanden sind, selbst wenn sie im Unterricht behandelt wurden (vgl. Büchter/Leuders 2005, 167). An die Diagnose knüpft die entsprechende Ausrichtung des Unterrichts bzw. ggf. eine adäquate Förderung an. Besonders in der Sekundarstufe II ist die Entwicklung und Erprobung von Förderkonzepten allerdings noch nicht weit fortgeschritten und Gegenstand aktueller Diskussionen (vgl. Boller et al. 2008b, 173).

Individuelle Förderung findet sich auch in verschiedenen rechtlichen Vorschriften. Ein Recht auf individuelle Förderung ist im Schulgesetz des Landes Nordrhein-Westfalen festgeschrieben (vgl. SchulG, §1 Abs. 1), das auch eine Schule fordert, die die „individuellen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler" (ebd., §2 Abs. 4) berücksichtigt. Die Lernenden haben darüber hinaus ein Recht, über die Entwicklung der eigenen Leistung informiert und entsprechend individuell beraten zu werden (vgl. ebd., §44 Abs. 2). Mit den Kernlehrplänen für das Fach Mathematik in der Sekundarstufe I wird versucht, den unterschiedlichen Anforderungen gerecht zu werden, indem keine bestimmten Unterrichtsinhalte und -methoden vorgeschrieben werden, sondern die wichtigsten mathematischen Kompetenzen formuliert wurden, die zu festgelegten Zeitpunkten vorhanden sein sollen. Eine weitere Ausdifferenzierung liegt in der Hand der einzelnen Schulen (vgl. Schulministerium 2007, 10).

Von besonderem Interesse für diese Untersuchung ist die Situation in der Oberstufe. Auch der Mathematik-Lehrplan für die Sekundarstufe II fordert explizit, dass „die individuelle Schülerpersönlichkeit mit ihren Vorerfahrungen, Möglichkeiten und Leistungsdispositionen" (Schulministerium 1999, 30) berücksichtigt wird. Der Lehrplan sieht Heterogenität nicht nur als Herausforderung, sondern auch als Chance für die SchülerInnen an. Die Unterschiedlichkeit der SchülerInnen soll produktiv für ein erfolgreiches Lernen der

Lerngruppe und der einzelnen Lernenden genutzt werden (vgl. ebd., XVIIIf.). Der Unterricht soll sich dabei an den Bedürfnissen der SchülerInnen orientieren, ihnen die Möglichkeit geben, auf den eigenen Lernvoraussetzungen aufzubauen, und unterschiedliche Wege zum Erreichen des Lernziels ermöglichen (vgl. ebd.). Dazu soll es ein breit gefächertes Angebot an Aufgabenstellungen geben, das unterschiedlichen Anforderungen gerecht wird (vgl. ebd., XIII).

Der Lehrplan nennt auch Wahlmöglichkeiten als ein Element der individuellen Förderung (vgl. ebd., XIII), worunter auch die Wahl des eigenen Kursprofils fällt. Zwar erfolgt in der Oberstufe grundsätzlich eine äußere (d. h. separierende) Differenzierung durch die Belegung unterschiedlicher Kurse, die Lerngruppen sind dennoch hinsichtlich unterschiedlicher Voraussetzungen, Interessen usw. heterogen zusammengesetzt (vgl. Boller/Möller 2009, 28).

1.2 Schülerfehler und -schwierigkeiten im Mathematikunterricht

Ein Fehler ist nach Weimer (o. J.) eine „Handlung, die gegen den Willen des Urhebers vom Richtigen abweicht." (ebd., zit. n. Radatz 1980, 18). Dem Fehler wird in dieser Definition also das objektiv Richtige entgegengesetzt. Dies schränkt die Möglichkeit für Fehler auf Situationen ein, in denen es solch eine objektiv richtige Lösung gibt, wodurch offene Aufgabenstellungen aber keineswegs ausgeschlossen sind, weil keine Eindeutigkeit der richtigen Lösung gefordert wird. Die Definition setzt für einen Fehler zudem eine Handlung voraus bzw. wird mit dieser gleichgesetzt. Für die Diagnose im Mathematikunterricht sind aber Situationen ebenso bedeutsam, in denen sich eine Schülerin bzw. ein Schüler nicht in der Lage sieht, eine Handlung vorzunehmen, daher auf die Handlung verzichtet und folglich auch keinen Fehler nach der obigen Definition begeht. Gleichwohl gelingt es ihr/ihm nicht, eine gestellte Aufgabe selbstständig zu lösen. Die Definition ist auch insofern problematisch, dass eine richtige Lösung auf bloßem Zufall beruhen kann – wenn sich etwa zwei Fehler gegenseitig aufheben oder wenn dieselbe Lösungsstrategie unter anderen Voraussetzungen zu einem falschen Ergebnis geführt hätte. Der Begriff des Fehlers soll daher für die vorliegende Arbeit durch den Begriff der *Schwierigkeit* ergänzt werden. Der Schüler bzw. die Schülerin hat eine Schwierigkeit bei einer Aufgabe oder bei einem Aufgabentyp, wenn er oder sie die Aufgabe nicht lösen kann oder sich unsicher ist, ob die gefundene Lösung richtig ist. Auch diese Definition setzt eine objektiv richtige Lösung voraus. Im Gegensatz zum Fehlerbegriff bezieht sie auch Situationen ein, in denen eine Aufgabe nicht oder nicht vollständig bearbeitet wird oder in denen die/der Schüler/in kein Vertrauen in die eigene Lösung hat. Da sich die mathematikdidaktische Literatur aber mit der Analyse von Fehlern und ihren Ursachen befasst, wird auch der Fehlerbegriff, wie im Weimer verwendet, in dieser Arbeit benutzt.

Fehler gehören „zum Treiben von Mathematik" (Vollrath 2001, 114) dazu. Lehrende sollen lernen, Fehler gewinnbringend zu nutzen, anstatt sie zu fatalisieren. Werden Fehler tabuisiert, unterbleibt das eigene Denken im Unterricht. Stattdessen werden Regeln auswendig gelernt und angewendet, ohne darüber nachzudenken, ob sie im zu bearbeitenden Problem überhaupt zur Anwendung kommen dürfen (vgl. Baruk 1989, 91). SchülerInnen müssen ihre eigenen Ideen ausprobieren können und nicht nur unter Anleitung handeln, um einen selbstbewussten Umgang mit der Mathematik zu erlernen (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 9). Das Erfolgserlebnis, Schwierigkeiten selbst überwunden zu haben, braucht aber Schwierigkeiten, die man überwinden kann.

Im Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe werden Fehler als „in der Regel unvermeidlicher Teil des Lernprozesses" (Schulministerium 1999, 39) bezeichnet und sollen in Lehr-Lern-Situationen konstruktiv thematisiert werden und zum Unterricht beitragen. Während Fehler beim Lernen als normal oder gar den Unterricht bereichernd betrachtet werden, wird im Lehrplan aber auch davon ausgegangen, dass nach dem „erfolgreichen Abschluss eines Lernprozesses" (ebd.) keine Fehler in der behandelten Thematik mehr auftreten.

Bei der Diagnose geht es zwar um Kompetenzen, die bei den SchülerInnen nach erfolgreichem Abschluss der Sekundarstufe I vorhanden sein sollten, dennoch geht es nicht darum, Fehler zu fatalisieren. Im Gegenteil müssen die Aufgaben so gewählt werden, dass sie den/die Interviewte/n an die Grenzen der Kompetenzen bringt, da gerade diese Grenzen Gegenstand der Untersuchung sind. Es ist daher angemessen, den SchülerInnen vor Beginn der Interviews mitzuteilen, dass sie keine Angst davor haben müssen, Fehler zu machen und dass es im Gegenteil gerade darauf ankommt, die Fehler gewinnbringend zu nutzen.

Kagan und Kogan (1970) gliedern den Lösungsprozess einer mathematischen Aufgabe in fünf Schritte: Zunächst muss die Aufgabenstellung erfasst und verarbeitet werden, dann werden Verknüpfungen zu Bekanntem hergestellt und genutzt, um danach Lösungshypothesen zu bilden. Im vierten Schritt werden die verschiedenen Hypothesen bewertet und zuletzt werden basierend auf den Hypothesen Schlussfolgerungen getroffen (vgl. ebd., zit. n. Radatz 1980, 34f.). Für Radatz (1980) ist diese Darstellung ungenügend, da er die „Trennung von Denken und Handeln" (ebd., 34f.) kritisiert. Dennoch gibt sie einen Hinweis darauf, dass Fehler an verschiedenen Punkten des Lösungsprozesses möglich und nicht einfach auf beispielsweise fehlendes Wissen zurückzuführen sind. Ebenso ist es möglich, dass die Aufgabenstellung nicht verstanden wurde, dass der Kontext der Aufgabe zu falschen Annahmen führt, dass Assoziationen zu irreführenden Hypothesen führen oder dass aus einer richtigen Hypothese eine falsche Schlussfolgerung gezogen wird.

Schwierigkeiten im Mathematikunterricht können also viele Ursachen haben, z. B. kognitive, sprachliche oder soziale Defizite (vgl. Scherer 1995, 22). Sie müssen ihren Ursprung auch keineswegs immer im Schüler selbst haben, auch das schulische Umfeld, der Lehrplan, die Lehrkraft (vgl. Radatz 1980, 34), die Situation in der Familie (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 9), die Lerngruppe oder das übrige soziale Umfeld können Probleme verursachen. Diese Möglichkeiten müssen bedacht werden, wenn nach der Ursache von Lernschwierigkeiten gesucht wird und Abhilfe geschaffen werden soll.

Die meisten Fehler sind kein Zufall, sondern Ergebnis von individuellen Lösungsstrategien. Dabei können diese Strategien auf Regeln zurückgehen, die für die SchülerInnen durchaus mit Sinn erfüllt sind (vgl. Radatz 1980, 3) und beispielsweise auf einer fehlerhaften Vorstellung beruhen. Unter Umständen sind die Regeln aber auch für die SchülerInnen selbst nicht Sinn erfüllend, da Mathematik von vielen SchülerInnen nicht mit der Realität in Verbindung gebracht, sondern als ein Spiel mit willkürlichen Regeln betrachtet wird (vgl. Ginsburg 1977, 86, zit. n. Radatz 1980, 27). Doch in beiden Fällen handeln die SchülerInnen nicht willkürlich und die bloße Feststellung, dass ihr Vorgehen „falsch" ist, trägt kaum dazu bei, solche Fehler in Zukunft zu vermeiden. Diagnosen sind Verfahren, um diese Regeln zu erkunden. Sie sind nötig, da einige Fehler z. B. bei der Korrektur von schriftlichen Lösungen nicht erkannt werden können, sondern sich erst „nach langem Nachdenken, vielleicht sogar erst nach einem Gespräch" (Vollrath 1999, 29) erschließen.

1.3 Diagnoseverfahren

Büchter und Leuders (2005) unterscheiden zwischen Kompetenz und Performanz (vgl. ebd., 166), wobei sie sich auf den Linguisten Noam Chomsky (1969) beziehen – verwenden die Begriffe allerdings in einer anderen Bedeutung als Chomsky, der sie ausschließlich auf das Sprechen bezog. Sie wollen mit dieser Unterscheidung deutlich machen, dass es eine Diskrepanz zwischen dem Können und dem Leisten eines Schülers bzw. einer Schülerin geben kann. Die Kompetenz ist das dabei das Potenzial, die Performanz die tatsächliche, in einer Testsituation erbrachte Leistung. Damit ist die Performanz ein Indikator für die Kompetenz, aber nicht mit ihr gleichzusetzen. Kompetenz charakterisiert also das, was ein/e SchülerIn zu leisten im Stande wäre, wenn alle anderen Faktoren, die die Performanz beeinflussen können, ideal sind. Pädagogische Diagnostik ist der Rückschluss von der Performanz auf die Kompetenz (vgl. Büchter/Leuders 2005, 166) und somit prinzipiell unsicher. Die Leistung kann beispielsweise wegen der konkreten Aufgabenformulierung, dem Aufgabenkontext oder wegen anderer Umstände wie Unruhe oder Emotionen hinter dem eigentlichen Potenzial zurück bleiben. Eine gute Diagnosemethode sowie eine Aufgabe, die zur Diagnose oder zur Leistungsüberprüfung geeignet ist, muss diese Unsicherheiten minimieren und einen möglichst guten Schluss von der Performanz auf die Kompetenz ermöglichen.

Bei der Diagnose soll festgestellt werden, welche Fehlstrategien oder -vorstellungen zu dem Fehler führen, damit adäquat gefördert werden kann. Es geht nicht darum, ob eine Aufgabe korrekt gelöst wird (vgl. Krauthausen/Scherer 2007, 209), sondern darum, auf welchem Weg sie gelöst wird. Eine reine Kontrolle des Lernens „durch Fragen und durch Beurteilen der Antwort" (Vollrath 2001, 113) stellt somit noch keine Diagnose dar, wenn damit keine tiefer gehende Analyse verbunden ist. Die reine Kontrolle sucht nicht nach verborgenen Ursachen. Vor allem handelt es sich bei einer Kontrolle nicht um eine Diagnose, wenn sie nur der Bewertung (für eine Zeugnisnote) oder der zukünftigen Veränderung des Unterrichts dient. Eine Diagnose hat immer eine Förderung zum Ziel.

Lehrende setzen Diagnoseinstrumente in der Regel im Rahmen ihrer täglichen Arbeit ein. Ihr primäres Interesse besteht darin, Lernprozesse zu unterstützen, aber nicht darin, Grundlagenforschung über das Mathematiklernen zu betreiben (vgl. Hunting 1997, 146). Dies unterscheidet die Diagnose durch die Lehrenden von der Diagnose in der mathematikdidaktischen Forschung und muss bei der Planung der Diagnose berücksichtigt werden. Dieser Hinweis ist deswegen wichtig, weil die Methode der hier durchgeführten diagnostischen Interviews in der Literatur hauptsächlich als Methode der didaktischen Forschung beschrieben wird. Besteht das Ziel aber nicht darin, generalisierbare Aussagen zu generieren oder zu überprüfen, sondern ein möglichst gutes Bild der Kompetenzen eines einzelnen Schülers bzw. einer einzelnen Schülerin zu erhalten, stellt dies andere Anforderungen an die Interviewführung.

Aber wie in der Forschung ist es wichtig, dass das Ziel einer Diagnose klar ist (vgl. Krauthausen/Scherer 2007, 210). Bei den Interviews, die für die vorliegende Arbeit durchgeführt werden, sollen Schwierigkeiten einzelner KollegiatInnen am Oberstufen-Kolleg im Umgang mit Termen und Gleichungen erkannt und jeweils Fördermaßnahmen vorgeschlagen werden. Ziel ist es hingegen nicht, verallgemeinerte Aussagen über die Kompetenzen aller KollegiatInnen des Oberstufen-Kollegs zu treffen und auch nicht, allgemeine Aussagen über Schwierigkeiten in der Algebra zu treffen. Ein weiteres und wichtiges Anliegen ist die Erforschung und Erprobung der Methode der diagnostischen Interviews im Mathematikunterricht der Oberstufe. Da sich bisherige Veröffentlichungen über Interviews vor allem auf die Primarstufe und die Erprobungsstufe beziehen, sind in Interviews an der Oberstufe ganz andere Schwierigkeiten zu erwarten, als in der Literatur thematisiert werden. Kein/e SchülerIn der Oberstufe wird sich noch wundern, dass das Ergebnis einer Abzählung nicht davon abhängig ist, in welcher Reihenfolge gezählt wird (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 8).

Büchter und Leuders (2005) unterscheiden zwischen verstehensorientierter Diagnose und verfahrensorientierter Diagnose (vgl. ebd., 172). Während die verfahrensorientierte Diagnose nach Fehlerursachen beim Anwenden eines (auswendig) gelernten Algorithmus sucht, bezieht sich die verstehensorientierte Diagnose auch darauf, ob die durchgeführten Operationen verstanden wurden. Nur eine verstandene Operation lässt sich umkehren und an andere als die geübten Problemstellungen anpassen. Eine genauere Auseinandersetzung mit dem Begriff „verstehen" folgt in Kapitel 2. Während frühere Studien meist verfahrensorientiert waren und beispielsweise typische Fehler der schriftlichen Rechenverfahren untersuchten, wird bei aktuellen Untersuchungen darauf Wert gelegt, dass eine verstehensorientierte (oder „kompetenzorientierte") Diagnose erfolgt.

Es gibt verschiedene Methoden, die zur Diagnose mathematischer Kompetenzen geeignet sind. Multiple-Choice-Tests gehören nicht dazu, weil sie keine Möglichkeit bieten, auf den zu Grunde liegenden Fehler zu schließen. Selbst wenn die zu Auswahl angebotenen Antwortmöglichkeiten aufgrund bestimmter erwarteter Fehlschlüsse oder typischer Fehlstrategien vorgegeben werden, lassen solche Tests kaum eine Schlussfolgerung zu. Identische Ergebnisse können auf verschiedenen Fehlern beruhen, weshalb eine reine Analyse von Ergebnissen nicht ausreicht, um den Fehler zu ermitteln (vgl. Radatz 1980, 34). Multiple-Choice-Tests können deswegen höchstens Anlass für eine genauere Analyse geben und haben eine sehr große Unsicherheit beim Schluss auf Kompetenzen (vgl. Büchter/Leuders 2005, 169). Sie erlauben auch keine Anerkennung von Teilkompetenzen, wenn SchülerInnen durchaus in der Lage sind, einen Großteil der Rechnung durchzuführen, aber den letzten Schritt nicht ausführen können. Tatsächlich besteht ein häufiger

„Fehler" darin, dass Aufgaben nicht zu Ende gerechnet werden (vgl. Radatz 1980, 37ff.). Der Fehler liegt dann aber eigentlich darin, dass der nächste Schritt nicht gemacht wurde oder gemacht werden konnte oder dass nicht erkannt wurde, dass das Teilergebnis noch keine Lösung darstellt.

Auch das bloße Zählen von Fehlern in einem Leistungstest wie einer Klassenarbeit stellt keine Diagnose dar, da die Fehlerrate allein „keine Hinweise auf die möglichen Ursachen einer Lernschwierigkeit bzw. die Gründe für das Ausbleiben einer angestrebten Leistung" (ebd., 3) gibt. Genau diese Ursachen sollen jedoch in einer Diagnose untersucht werden, um Möglichkeiten für eine Förderung zu bewerten. Ziel der Diagnose im Mathematikunterricht ist es, ein Verständnis der Vorgehensweise und Grundvorstellungen einzelner SchülerInnen zu entwickeln, die Erhebung von verallgemeinerten Aussagen über eine große Gruppe ist nicht zentrales Anliegen (vgl. Scherer 1996, 77). Für eine auf Verstehen ausgerichtete Forschung sind qualitative Ansätze in der Regel sinnvoller als quantitative Erhebungen wie sie beispielsweise bei einer Berechnung von Lösungshäufigkeiten einzelner Aufgaben gegeben wären.

Geeignete Diagnosemethoden sind die Analyse von Schülerprodukten oder des Lösungsprozesses, das Beobachten der SchülerInnen beim Lösen von Aufgaben, das sogenannte laute Denken und diagnostische Interviews (vgl. Brueckner 1935, zit. n. Radatz 1980, 64). Als Grundlage für die Analyse von Schülerprodukten Lösungen können Klassenarbeiten, Hausaufgaben oder in der Schule bearbeitete Aufgaben dienen (vgl. Jordan/vom Hofe 2008, 4). Dabei wird versucht, die einzelnen dokumentierten Schritte nachzuvollziehen und dadurch auf Schwierigkeiten zu schließen. Die Analyse ist eine gut zugängliche Methode und sagt schon mehr aus als Multiple-Choice-Tests. Die Produkte könnnen durch die Lehrkraft oder durch die SchülerInnen selbst analysiert werden (vgl. ebd.). Aber nicht immer ist die Fehlstrategie anhand der schriftlichen Lösung ersichtlich, wodurch es zu Fehldeutungen kommen kann (vgl. Radatz 1980, 64f.; vgl. Krauthausen/Scherer 2007, 210). Sollte diese Methode daher nicht zielführend sein, ist es sinnvoll, andere Diagnoseformen anzuschließen. Die Analyse von schriftlichen Lösungen bietet eine Grundlage für die Vorbereitung weiterer Methoden wie diagnostische Interviews.

Das Beobachten der SchülerInnen ohne einzugreifen ist eine im Unterricht weit verbreitete Praxis (vgl. Radatz 1980, 67) und ebenfalls gut zugänglich. Diese Methode bietet aber nicht die Möglichkeit, genauere Analysen durchzuführen, da nur Zugriff auf die Äußerungen besteht, die die SchülerInnen von sich aus tätigen. Die meisten Denkprozesse bleiben verborgen. Es ist daher sinnvoll, die Aufgaben von vornherein so zu gestalten, dass sie die SchülerInnen zum Begründen auffordern, um den Lösungsweg nachvollziehbar zu machen (vgl. Büchter/Leuders 2005, 171). Dieser Grundsatz gilt aber auch für die übrigen Diagnoseformen.

Beim sogenannten lauten Denken werden die SchülerInnen aufgefordert, den Lösungsweg zu verbalisieren, d. h. alle Gedanken beim Lösen der Aufgabe auszusprechen. Während des Unterrichts ist diese Form der Diagnose kaum möglich. Ein Problem des lauten Denkens ist, dass das Verbalisieren Aufmerksamkeit der SchülerInnen beansprucht, die somit nicht vollständig zum Bearbeiten der Aufgaben zur Verfügung steht. Einige SchülerInnen sind gar nicht in der Lage, gleichzeitig zu sprechen und nachzudenken. Bei anderen fördert die Versprachlichung der Gedanken aber auch die Konzentration (vgl. Clauß 1977, 149). Kinder unter zehn Jahren sind in der Regel nicht dazu fähig, über eigenes Denken nachzudenken (Introspektion) und diese Gedanken in Worte zu fassen (vgl. Piaget 1974, 144f.). In der vorliegenden Arbeit geht es zwar um Studien mit OberstufenschülerInnen, doch auch bei ihnen kann die Fähigkeit zur Introspektion eingeschränkt sein. Ohnehin ist fraglich, inwiefern es überhaupt möglich ist, eigene Gedankengänge bewusst nachzuvollziehen. Der Mensch hat beim Lösen eines Problems bewussten Zugriff auf den Lösungsplan (wenn ein solcher nötig ist) und ggf. auf Zwischenergebnisse. Wenn ihm eine Frage gestellt wird, ist er sich der Antwort bewusst, aber nicht, welche Prozesse in seinem Gehirn abgelaufen sind, um diese Antwort zu produzieren (vgl. Nisbett/Wilson 1974, 232). Neben dem grundsätzlichen Problem, über das eigene Denken nachzudenken, kann auch mangelnde Sprachgewandtheit dazu führen, dass die SchülerInnen sich nicht dazu in der Lage sehen, ihre Gedanken auszusprechen (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 61).

Beim lauten Denken zeigt sich, dass SchülerInnen Aufgaben unterschiedlich lösen, wenn sie die Aufgaben schriftlich bearbeiten und wenn sie sie mündlich bearbeiten. Eine mögliche Erklärung dafür ist, ist dass schriftliche Lösungen womöglich kalkülorientierter durchgeführt werden als mündliche (vgl. Radatz 1980, 28f.). Bei der Auswahl der geeigneten Methode ist dies zu berücksichtigen. Für eine verfahrensorientierte Diagnose sollte daher auch beim lauten Denken Papier bereit liegen.

Im Gegensatz zum reinen lauten Denken sind bei diagnostischen Interviews Reaktionen der/des Diagnostizierenden möglich. Die Probleme beider Formen sind ähnlich und das laute Denken wird auch oft in Verbindung mit Interviews eingesetzt (vgl. ebd., 66). Eine ausführliche Diskussion der Interviews folgt im nachfolgenden Kapitel.

Bei der Wahl der Diagnosemethode sind die Vor- und Nachteile der verschiedenen Formen zu berücksichtigen. Für eine gründliche Diagnose ist es sinnvoll, mehrere Methoden miteinander zu kombinieren (vgl. Scherer 1996, 87). Eine „perfekte Diagnose" ist aber nicht möglich, weil Kompetenzen nicht vollständig messbar sind und auch weil SchülerInnen in der Regel nicht bereit sind, ihren „Entwicklungsstand zu offenbaren" (Büchter/Leuders 2005, 104).

Bei allen Verfahren muss berücksichtigt werden, dass der Rechenweg der Schülerinnen und Schüler stark von dem Weg abweichen kann, den die Lehrkraft gewählt hätte. Er kann aber durchaus durchdacht und zielführend sein. Daher ist es wichtig, dass sehr genau versucht wird, die Rechenwege der SchülerInnen nachzuvollziehen und ihre Leistung einzuschätzen, um eine adäquate Förderung zu ermöglichen (vgl. Selter/Spiegel 1997, 13). Es sollte Wert darauf gelegt werden, den „rationalen Kern in scheinbar irrationalem Vorgehen" (ebd., 14) zu finden und zu würdigen, um zu verhindern, dass die Lernenden das Vertrauen in ihre Kompetenzen verlieren und ihre eigenen Überlegungen vorschnell als falsch anzweifeln.

1.4 Besondere Aspekte diagnostischer Interviews

Das diagnostische Gespräch als Erhebungsmethode in der Wissenschaft geht zurück auf Interviewstudien von Jean Piaget, der in halbstandardisierten, qualitativen Interviews mathematische Kompetenzen von Kleinkindern und Grundschulkindern erforschte. Bei den Interviews bearbeitet der/die Interviewte Aufgaben und spricht Lösungsschritte aus (lautes Denken), wodurch Fehlertechniken besser erkennbar werden als bei rein schriftlichen Diagnoseverfahren (vgl. Radatz 1980, 6). Sinnvollerweise wird das Interview aufgezeichnet und hinterher transkribiert, um die Aussagen detailliert auswerten zu können (vgl. vom Hofe et al. 2009, 135). Während des Interviews werden Hypothesen über die Gedanken der Schülerinnen und Schüler gebildet, um darauf reagieren zu können.

Im Gegensatz zum reinen lauten Denken und anderen nicht-interaktiven Diagnoseformen besteht bei Interviews aber die Möglichkeit, Zwischenfragen zu stellen oder die Aufgaben flexibel an die Situation anzupassen (vgl. Radatz 1980, 65). Außerdem ist es möglich, physische Hilfsmittel wie geometrische Körper einzusetzen (vgl. Hunting 1997, 149). Obwohl die Methode kaum geeignet ist, quantitative Aussagen (etwa über die Häufigkeit bestimmter Schwierigkeiten) zu machen, da die Stichproben in der Regel klein sind, haben sie sich auch in der Forschung bewährt, weil sie geeignet sind, auch unvorhergesehene Ergebnisse zuzulassen. Somit werden sie der Vielfalt der Interviewten auch eher gerecht. Zur Vergleichbarkeit muss das Interview aber dennoch gründlich geplant werden (vgl. Selter/Spiegel 1997, 101f.). Bei der unterrichtsbegleitenden Diagnose durch die Lehrkräfte spielt die Vergleichbarkeit jedoch keine wichtige Rolle.

Als interaktive und reflexive Methode ist ein Interview kaum vorhersehbar (vgl. Hunting 1997, 149). Zwar ist es sinnvoll, sich mögliche Antworten der/des Interviewten und dazu geeignete Reaktionen im Vorfeld zu überlegen, die große Vielzahl der möglichen Interviewverläufe macht eine exakte Planung aber unmöglich. Ein Leitfaden mit einigen Standardfragen und -reaktionen ist daher hilfreich. Im Gegensatz zur Grundlagenforschung, bei der es vor allem auf Objektivität ankommt, ist es bei der Diagnose zum Zweck der individuellen Förderung aber vertretbar, vom Leitfaden abzuweichen, um auf unvorhergesehene Antworten reagieren und genauere Nachforschungen anstellen zu können (vgl. ebd., 153). Der angefertigte Ablaufplan sollte deshalb die notwendige Flexibilität zulassen. Sinnvoll ist es, Standardfragen und -reaktionen für bestimmte Situationen zu formulieren, Aufgaben auszuwählen, die gute Rückschlüsse auf die Kompetenz erlauben, und Vorüberlegungen zu möglichen Lösungswegen der Aufgaben zu treffen. Vor allem aber ist es während des Interviews nötig, auf die Situation zu reagieren, um den Interviewten „an die Grenzen seines Wissens vorstoßen" (Selter/Spiegel 1997, 107) zu lassen.

Diagnostische Interviews sind eng verwandt mit dem lauten Denken und haben deshalb auch ähnliche Probleme. Eine Untersuchung, die nur auf lautes Denken setzt, ist in der Praxis auch mit Zwischenfragen oder -bemerkungen verbunden, weil Gedanken unklar geblieben sind. In der Theorie wird an dieser Stelle das Experiment unterbrochen und wird erst mit der Beantwortung der Frage fortgesetzt (vgl. van den Brink 1981, 30). Somit ist solch eine Untersuchung in der Praxis kaum von einer Interviewstudie unterscheidbar. Unterschiede können im Redeanteil des Interviewers und in der Art der gestellten Fragen bestehen, Wechselwirkungen wird es aber immer geben. Eine Studie, die ausschließlich im lauten Denken besteht, ist somit kaum denkbar. Diagnostische Interviews sind daher wissenschaftlich ehrlicher als das reine laute Denken. Beim lauten Denken werden allein die Aussagen der SchülerInnen analysiert und ein Einfluss durch die in der Beobachtungssituation angelegten äußeren Umstände kaum berücksichtigt. Beim Interview dagegen ist durch die Interaktion zwischen InterviewerIn und SchülerIn eine Beeinflussung der Untersuchung offensichtlich. Diese soll zwar klein gehalten werden, muss aber Berücksichtigung in der Interpretation der Ergebnisse finden.

In der Tat ist der mögliche Einfluss durch den Interviewer, der die wesentlichen Vorteile gegenüber anderen Methoden bietet, auch gleichzeitig der größte Nachteil der diagnostischen Interviews. Manchen LehrerInnen fällt die Abgrenzung zur Lehr-Lern-Situation schwer (vgl. Hunting 1997, 148) und sie sind geneigt, Hinweise auf Fehler oder einen möglichen Lösungsweg zu geben. Es geht bei den Interviews aber nicht um das Hinführen zu einer richtigen Lösung, sondern darum, die Gedanken nachzuvollziehen. Der/die Interviewende sollte sich zurückhalten, um die Gedankengänge nicht zu stören und um keine Verunsicherung zu erzeugen (vgl. Selter/Spiegel 1997, 102). Es besteht die Gefahr, durch die Rückfragen und Kommentare Erklärungen für Fehler zu provozieren, die ohne dieses Einmischen nicht gegeben worden wären (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 61). Bei Fehlern, die sich aus dem falschen Verständnis der Aufgabenstellung ergeben, ist es in der Regel geboten, einzugreifen, aber inhaltliche Fehler sollen nicht korrigiert, sondern ergründet werden (vgl. Selter/Spiegel 1997, 103). Doch das Nachhaken bei Fehlern muss vorsichtig eingesetzt werden, denn SchülerInnen kennen es aus dem Unterricht, dass Nachfragen zu Rechenschritten in der Regel genau dann kommen, wenn der Rechenschritt fehlerhaft ausgeführt wurde (vgl. Hunting 1997, 155). Entsprechend schwierig ist es, Fehler im Interview zu untersuchen, weil jede Nachfrage als Hinweis auf einen Fehler aufgefasst werden kann und die Antwort dann oft keine Erklärung des Fehlers, sondern eine Korrektur liefert. Der/die Diagnostizierende kann daher nicht sicher sein, ob die Antworten den tatsächlichen Rechenweg wiedergeben, oder ob sie erst nachträglich gebildet wurden, um den vermeintlichen Erwartungen zu entsprechen (vgl. Selter/Spiegel 1997, 30). Außerdem muss berücksichtigt werden, dass SchülerInnen und LehrerInnen die Frage „Warum hast du das so gemacht?" unterschiedlich verstehen können. Während die Lehrkraft eigentlich danach fragt, welche Berechtigung für eine Operation besteht, antworten die SchülerInnen mit dem Zweck („Um das x weg zu bekommen.") (vgl. Vollrath 1994, 78). Es sollten auch keine Fragen gestellt werden, die auf Annahmen fußen, die nicht unbedingt zutreffen müssen. Zum Beispiel kann die Frage „Wie hast du das gerechnet?" problematisch sein, weil sie unterstellt, dass gerechnet wurde, obwohl möglicherweise geschätzt wurde (vgl. Selter/Spiegel 1997, 102).

Eine Methode, Nachfragen zu vermeiden, besteht darin, Widersprüche zu erzeugen, damit noch einmal über die Lösung nachgedacht wird (vgl. ebd., 104). Vor allem aber ist Geduld nötig. Auch langes Schweigen muss ausgehalten werden können und nicht zu früh durch möglicherweise suggestive Fragen unterbrochen werden (vgl. ebd., 103f.).

Zu Beginn des Interviews muss außerdem klargestellt werden, dass es nicht schlimm ist, wenn auch etwas Falsches gesagt wird (vgl. ebd., 102), um eine Prüfungsatmosphäre und angepasste Antworten zu vermeiden. Zudem sollte mit einfachen Aufgaben begonnen werden, um Mut zur Lösung der weiteren Aufgaben zu erzeugen (vgl. ebd., 107). Negative Äußerungen bei Fehlern sollten grundsätzlich vermieden werden (vgl. ebd., 20). Zu einer angenehmen Atmosphäre trägt es auch bei, wenn die TeilnehmerInnen der Interviewstudien über die Interviewsituation und die verwendeten Methoden aufgeklärt werden, um das unangenehme Gefühl zu vermeiden, Objekt eines Experiments zu sein (vgl. van den Brink 1981, 29). Dazu gehört zum Beispiel, dass ihnen mitgeteilt wird, wozu die Erkenntnisse der Untersuchung verwendet werden sollen.

Nachfragen während des Interviews dürfen nicht suggestiv gestellt werden oder Hinweise auf andere Lösungsstrategien geben. Problematisch sind auch geäußerte Vermutungen über den Lösungsweg der/des Interviewten. Sie können von der befragten Person bejaht werden, obwohl sie nicht zutreffen. Ein möglicher Grund ist, dass der/die Befragte gerade über etwas nachdenkt und die Vermutung schnell bejaht, um die Ablenkung zu unterbinden und Zeit zum Nachdenken zu gewinnen. Eine andere Motivation, falsche Vermutungen zu bejahen kann darin bestehen, den Erwartungen der Interviewers bzw. der Interviewerin zu entsprechen. (vgl. ebd., 105). Dies kann besonders dann der Fall sein, wenn die Fragen von einer Lehrkraft gestellt werden, die auch über Zeugnisnoten entscheidet. Trotz aller Vorsicht, keine beeinflussenden Fragen oder Anmerkungen zu äußern, muss für die Auswertung des Interviews berücksichtigt werden, dass auch ein neutraler Interviewer die interviewte Person beeinflusst (vgl. ebd., 106).

Neben den unerwünschten Einflüssen durch die befragende Person stellt auch das laute Denken eine Fehlerquelle dar. Dazu gehört die mangelnde Fähigkeit insbesondere jüngerer SchülerInnen, über das eigene Denken nachzudenken (siehe Kapitel 1.3). Darüber hinaus kann die Außergewöhnlichkeit der Interview-Situation dazu führen, dass die Leistung vom normalen Niveau abweicht (Krauthausen/Scherer 2007, 212), wobei es auch durchaus möglich ist, dass die „Leistungen einzelner Schüler […] im Interview besser als im Unterricht" (Scherer 1996, 87) sind.

Diagnostische Interviews können mit einzelnen SchülerInnen oder in kleinen Gruppen durchgeführt werden. Ein Nachteil von Gruppeninterviews besteht darin, dass sich die Interviewten gegenseitig beeinflussen, wenn beispielsweise ein/e SchülerIn in der Häufigkeit oder Qualität der Antworten dominiert. Ein weiterer Nachteil ist der Verlust von Informationen, die in einem Einzelinterview gewonnen worden wären, der dadurch zustande kommt, dass in einem Gruppeninterview nicht immer alle Teilnehmenden auf alle Fragen antworten. Zudem stellt die nötige Differenzierung eine Herausforderung dar, da die SchülerInnen die Aufgaben womöglich mit sehr unterschiedlichem Tempo, mit sehr unterschiedlichen Ansätzen oder auf sehr unterschiedlichem Niveau angehen werden. Einen Vorteil bietet dagegen die für die Interviewten angenehmere Situation im Vergleich zu einem gefühlten „Verhör" bei Einzelinterviews. Positiv sind auch die natürlichen Gespräche zwischen den Teilnehmenden, die Erkenntnisse über die Denkprozesse liefern können. Gruppeninterviews sind zudem näher an Unterrichtssituationen und ermöglichen eine Arbeitsteilung und gegenseitige Unterstützung beim Lösen der Aufgaben (vgl. Selter/Spiegel 1997, 106).

1.5 Diagnoseaufgaben

Ob eine Aufgabe eine „gute Aufgabe" ist oder nicht, hängt davon ab, ob sie ihren Einsatzzweck erfüllt (vgl. Büchter/Leuders 2005, 9). Vor der Bewertung einer Aufgabe muss daher klar sein, welches Ziel mit dieser Aufgabe verfolgt wird, um die Maßstäbe festzusetzen. Eine Aufgabe, die in Lernsituationen im Unterricht eingesetzt wird, muss anderen Anforderungen genügen als eine Aufgabe in einem schriftlichen Leistungstest und diese wiederum anderen Anforderungen als eine Aufgabe in einer interaktiven Diagnosesituation. So deckt eine gute Aufgabe für Heinrich Winter (1985) möglichst viele inhaltsbezogene Kompetenzen ab (vgl. ebd., 21). Dies mag für Lernaufgaben gelten, Leistungsaufgaben sollten aber für eine gute Validität möglichst scharf auf einzelne Kompetenzen abzielen. Beim Lernen steht die korrekte Bearbeitung der Aufgabe nicht im Vordergrund – im Gegensatz zu einer Leistungsüberprüfung im Anschluss an einen Lernprozess (vgl. Büchter/Leuders 2005, 165). Es gibt aber auch Ansprüche an gute Aufgaben, die sowohl für Lern- wie auch für Leistungsaufgaben gelten.

Zunächst einmal sollten Aufgaben nicht künstlich wirken (vgl. Vollrath 2001, 109), sondern „ehrlich" sein. Geeignet sind realistische Probleme, bei denen die Anwendung von Mathematik eine sinnvolle Möglichkeit zur Lösung oder zum Durchdringen des Problems darstellt. Auch innermathematische Aufgaben können authentisch sein, wenn deutlich ist, dass die Lösung der Aufgabe kein reiner Selbstzweck ist, sondern beispielsweise zum Erlernen wesentlicher Sachverhalte sinnvoll ist. Insgesamt sind Aufgaben authentisch, „wenn sie Schülerinnen und Schüler zu mathematischen Tätigkeiten anregen, die typisch für die Entstehung und Anwendung von Mathematik sind" (Büchter/Leuders 2005, 86). Nicht authentisch sind hingegen Aufgaben, die innermathematischen Problemen einen unrealistischen Lebensweltbezug überstülpen („Thomas kauft 287 Melonen.") oder Schlüsse verlangen, die im Alltag nie vorkommen würden („Auf einer Geburtstagsfeier wurden 6 Liter Cola getrunken. Wie viele Gäste waren da, wenn jeder Gast 0,4 Liter getrunken hat?"). Solche Aufgaben können zu dem Eindruck führen, Mathematik wird „nur in der und für die Schule" (ebd., 75) gelernt. Mathematische Operationen werden somit Regeln in einem irrelevanten Spiel, die auswendig gelernt, „aber nicht verstanden werden müssen" (ebd.). Ob eine Aufgabe authentisch ist oder nicht, hängt auch davon ab, wer sie bearbeitet. Gute Aufgaben sollten daher für die SchülerInnen ausgewählt sein oder die notwendige Flexibilität bieten, sie an die Lerngruppe anzupassen (vgl. Vollrath 2001, 109).

Aufgaben sollten möglichst offen sein, d. h. auf mehrere Arten lösbar sein und/oder mehrere Lösungen zulassen. Dies berücksichtigt zum einen die Individualität der SchülerInnen, zum anderen fördert die Offenheit von Aufgaben, dass Verfahren verstanden und reflektiert und nicht nur auswendig gelernt werden, um danach automatisiert angewendet zu werden (vgl. Büchter/Leuders 2005, 93). Auch der Lehrplan fordert geöffnete Aufgaben in schriftlichen Leistungsüberprüfungen (vgl. Schulministerium 2007, 37). Eine Methode zur Öffnung von Aufgaben besteht darin, ein Problem umzukehren (vgl. ebd., 171), also beispielsweise als Aufforderung der Form „Gib eine Aufgabe mit folgender Lösung an". Die Öffnung von Aufgaben schließt „unverstandene Reproduktion" (ebd.) aus, die Schwierigkeit sollte dadurch aber nur geringfügig stiegen. Es wird getestet, ob ein Inhalt *verstanden* wurde und nicht nur, ob er wiederholt werden kann, denn erst wenn eine Operation durchdrungen ist, kann sie auch umgekehrt werden (vgl. Aebli 2006, 235). Andere Möglichkeiten für offene Aufgaben bestehen darin, Begriffe in eigenen Worten erklären zu lassen und Modelle interpretieren zu lassen (vgl. Büchter/Leuders 2005, 175), beispielsweise indem eine realistische Situation beschrieben werden soll, die durch einen Graphen repräsentiert wird.

Eine weitere Anforderung an Aufgaben stellt ihr Potenzial zur Differenzierung dar. Aufgaben sollten weder über- noch unterfordern und daher so ausgewählt werden, dass sie verschiedene Schwierigkeiten abdecken (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 61). Möglichkeiten für differenzierende Aufgaben bestehen darin, die SchülerInnen die zu bearbeitenden Aufgaben selbst auswählen zu lassen (vgl. Büchter/Leuders 2005, 107), in Teilaufgaben mit steigender Schwierigkeit (vgl. ebd., 105) oder in offenen Aufgaben, die „von selbst differenzieren" (ebd., 111), indem sie auf verschiedene Arten und Weisen und auf verschiedenen Niveaus gelöst werden können. Bei diagnostischen Interviews ist es außerdem sinnvoll, wenn die Aufgaben der Situation angepasst werden können.

Diagnoseaufgaben und Aufgaben in Leistungstest müssen zudem einen möglichst präzisen Schluss von der Performanz auf die Kompetenz zulassen, d. h. möglichst valide sein. Dazu gehört vor allem, dass die Aufgabe wirklich nur die zu testende Kompetenz erfasst (vgl. Büchter/Leuders 2005, 173) und nicht etwa durch eine anspruchsvolle Formulierung die Lesekompetenz. Die Validität ist auch gefährdet, wenn eine Aufgabe sehr viele Kompetenzen abdeckt – was bei Lernaufgaben durchaus gewünscht ist (vgl. Krauthausen/Scherer 2007, 201). Testaufgaben müssen daher auf ihre Validität geprüft werden und ggf. auf die interessanten Aspekte reduziert werden (vgl. Büchter/Leuders 2005., 174). Um möglichst zutreffende diagnostische Schlüsse zu ermöglichen, sollten Aufgaben zum Begründen und zur Anfertigung von Eigenprodukten wie Zeichnungen auffordern (vgl. ebd.). Dies ist besonders im Zusammenhang mit offenen Aufgaben sinnvoll.

Weitere Aspekte für die Bewertung einer Diagnoseaufgabe sind die benötigte Zeit, ob sie Interesse weckt, ob weiteres Material benötigt wird und ob ein Bezug zum Lehrplan besteht (vgl. Hunting 1997, 151).

Inhaltlich können Diagnoseaufgaben wie alle anderen Aufgaben im Mathematikunterricht nach den zur Bearbeitung erforderlichen inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen eingeordnet werden. Der Anspruch einer Aufgabe wird in „Anforderungsbereiche" (Kultusministerkonferenz 2003, 13) eingeordnet. Im untersten Anforderungsbereich I ist es ausreichend, Unterrichtsinhalte zu reproduzieren, im zweiten Anforderungsbereich müssen Zusammenhänge, zum Beispiel durch „mehrschrittige Argumentationen" (ebd.) hergestellt werden und im dritten Bereich wird erwartet, die im Unterricht erworbenen Kompetenzen verallgemeinert und reflektiert einzusetzen (vgl. ebd.).

1.6 Adäquate Förderung

Jede Diagnose hat definitionsgemäß eine anschließende Intervention zum Ziel (vgl. Büchter/Leuders 2005, 167), da es sich sonst nicht um eine Diagnose, sondern um eine Fallstudie handeln würde. Die bloße Analyse von SchülerInnen-Fehlern ohne eine Intervention, gerade in gesonderten Untersuchungssituationen wie Interviews, kann sogar kontraproduktiv sein, da den SchülerInnen ggf. durch die Analyse Schwächen bewusst werden, sich diesen ohne ein Förderangebot aber hilflos ausgeliefert fühlen (vgl. Kretschmann 2008, 7). Aufbauend auf die Diagnose muss daher ein Förderkonzept erarbeitet werden. Die Intervention im Mathematikunterricht darf dabei aber nicht als „Medizin" gegen Schwierigkeiten verstanden werden. Fehler sind keine „Krankheiten", Fördermaßnahmen führen deshalb auch nicht zu einer „Heilung" (vgl. Radatz 1980, 67). Sie stellen ein Angebot für die SchülerInnen dar, müssen von diesen aber auch angenommen werden, um zu einem Erfolg zu führen. Ohne Motivation kann sich kein Erfolg einstellen (vgl. Wagemann 1988, 57).

Literatur zur Förderung im Mathematikunterricht bezieht sich meist auf den Erwerb grundlegender mathematischer Vorstellungen wie der des Zahlbegriffs in der Grundschule und ist meist auf SchülerInnen mit einer „Rechenschwäche" ausgerichtet – wobei allerdings unwahrscheinlich ist, dass es so etwas wie angeborene, generelle Schwierigkeiten beim Mathematiklernen überhaupt gibt. Wahrscheinlicher ist, dass andere Faktoren wie Störungen der visuellen Wahrnehmung oder in der Gedächtnisleistung zu Grunde liegen (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 22). An diesen spezifischen Störungen muss dann auch die Förderung ansetzen.

Förderung ist grundsätzlich im ganzen Klassenverband (bzw. Kurs), in speziellen Förderkursen oder als Einzelförderung möglich. Förderkurse sind von Unterricht abgekoppelt und unterstellen teilweise gleiche Förderbedürfnisse für alle SchülerInnen, differenzieren also nicht weiter und setzen nicht bei den individuellen Voraussetzungen an. Sie wirken daher meist nicht langfristig (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 114) und stigmatisieren die SchülerInnen.

Zum Zuschnitt der Fördermaßnahmen auf den einzelnen Schüler bzw. die einzelne Schülerin ist das Zurückgreifen auf allgemeine Kopiervorlagen oder ähnliches nicht zielführend (vgl. ebd., 4f.), zumindest dann nicht, wenn die Vorlagen nicht spezifisch für den einzelnen Schüler ausgewählt und ggf. angepasst wurden. Die Auswahl der Förderaufgaben kann daher auch nicht das gesamte Fachgebiet abdecken, in dem ein Förderbedarf festgestellt wurde (z. B. „Gleichungen"), sondern muss spezifischer eingeschränkt werden. Dazu ist es nötig, die individuellen Schwierigkeiten zu identifizieren und dann entsprechend zu fördern (vgl. Vollrath 1994, 78). Fördermaßnahmen können dann ähnlich aussehen wie der Unterricht, bei dem die entsprechenden Inhalte erstmalig behandelt werden. Da Förderbedarfe in höheren Schuljahren aber ihre Ursachen häufig in unverstandenen Inhalten früherer Schuljahre haben, ist es nötig, bereits bei diesen anzusetzen und die Grundlagen zu schaffen. Erst wenn die Grundlagen geschaffen und die mathematischen Inhalte verstanden sind, kann sich ein „Üben" im Sinne von Training durch Wiederholen anschließen (vgl. Wagemann 1988, 58). Ein reines automatisierendes Üben wie beim Auswendiglernen kann für häufig wiederkehrende Teilprobleme (wie die Produkte des kleinen Einmaleins) sinnvoll sein, darf aber erst folgen, wenn Verständnis vorhanden ist (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 86). Allerdings ist fraglich, ob es in der Oberstufe überhaupt noch so grundlegende Inhalte zu lernen gibt, dass ein Auswendiglernen sinnvoll ist.

Für einen langfristigen Erfolg sollte die Förderung nicht in einzelnen, langen Zeitblöcken vonstattengehen, sondern in viele kurze Einheiten aufgeteilt werden. Lorenz und Radatz (1993) schlagen ein Förderkonzept vor, bei dem sich die SchülerInnen täglich zehn Minuten mit Förderaufgaben beschäftigen (vgl. ebd., 87). Die Langfristigkeit wird vor allem durch eine möglichst vielseitige und tiefgehende Beschäftigung mit der Thematik sichergestellt. Insbesondere sollten Inhalte mit Unterstützung der Lehrkraft selbstständig erarbeitet und nicht vorgegeben und auswendig gelernt werden (vgl. Wagemann 1988, 58f.).

Wie Diagnoseaufgaben sollen Förderaufgaben authentisch und möglichst offen sein. Authentizität durch Anwendungsbezug kommt hierbei eine besondere Rolle zu, um die Sinnhaftigkeit des Mathematiklernens und den Realitätsbezug der Inhalte erfahrbar zu machen (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 87) und Motivation zu bewahren. Das Differenzierungsvermögen der einzelnen Aufgaben spielt dadurch, dass die Aufgaben für den einzelnen Schüler ausgewählt wurden, eine untergeordnete Rolle, ist aber dennoch sinnvoll, um Motivation zu erzeugen und Fortschritte erlebbar zu machen. Aufgaben sollten deswegen auch Erfolgserlebnisse ermöglichen. Dies wird zum Beispiel durch steigende Schwierigkeitsgrade ermöglicht (vgl. ebd., 86). Im Gegensatz zu Diagnoseaufgaben müssen Förderaufgaben keinen Schluss von der Performanz auf die Kompetenz ermöglichen, sondern den Erwerb neuer Kompetenz unterstützen. Förderaufgaben müssen deswegen auch nicht die Anforderung erfüllen, möglichst wenige Kompetenzen abzudecken. Im Gegenteil sind Aufgaben sinnvoll, die Verbindungen zu anderen Bereichen der Mathematik herstellen (vgl. ebd., 87).

Um zu vermeiden, dass sich während des Lernens bzw. Übens aufgetretene Fehler festigen, ist eine Kontrolle des Fortschritts und der Ergebnisse unerlässlich (vgl. Wagemann 1988, 58). Diese kann durch eine Lehrkraft, durch andere SchülerInnen oder durch den Schüler selbst geschehen. Eine solche Selbstkontrolle kann zum Beispiel durch ein Lösungsblatt erfolgen und wird vor allem aus pragmatischen Gründen eingesetzt, sodass die Zeit der Lehrkraft für die Unterstützung anderer Lernender zur Verfügung steht. Auch für die Aufgaben mit der Möglichkeit zur Selbstkontrolle gilt, dass Kopiervorlagen häufig ungeeignet sind und stattdessen selbst Aufgaben entworfen werden sollten (vgl. Lorenz/Radatz 1993, 87).

2 Gleichungen und Termumformungen im Mathematikunterricht

In der Schule ist Algebra „die Lehre von den Termen, Gleichungen und Gleichungssystemen" (Vollrath 1994, 1). Eine besondere Bedeutung für die Mathematik hat dabei die Formelsprache. Sie ermöglicht eine einheitliche und eindeutige Kommunikation über Mathematik und ist geeignet, allgemeine Gesetze oder Probleme zu formulieren (vgl. ebd., 85f.). Solch eine eindeutige Notation ist essenziell für die verständliche Dokumentation von mathematischen Gedankengängen oder auch für das Programmieren mathematischer Algorithmen. Variablen ermöglichen es dabei, allgemeine, abstrakte Sachverhalte zu untersuchen und über sie zu kommunizieren, wie dies beispielsweise in mathematischen Beweisen der Fall ist (vgl. Malle 1993, 10).

Eine große Anzahl von mathematischen Sachverhalten lässt sich mit Hilfe von Termen und Gleichungen beschreiben. Dabei eine konkrete, spezielle oder unter Verwendung von Variablen eine allgemeine Aussage darstellen, die als „Schablone" für eine konkrete Gleichung verstanden werden kann. Bestimmte Operationen sind möglich, um mit einem Term, einer Gleichung oder einem Gleichungssystem zu arbeiten (vgl. ebd., 46).

Terme und Gleichungen stellen damit einen ganz wesentlichen Teil des Mathematikunterrichts in der Schule dar. Kinder haben häufig bereits vor der Einschulung Kontakt mit der Formelsprache, wenn sie die Ziffernsymbole kennen lernen. In der Grundschule wird die Formelsprache erweitert, beispielsweise durch Rechensymbole oder das Stellenwertsystem der Dezimalzahlen. In der Sekundarstufe I werden Variablen eingeführt, Funktionsterme angegeben, Formeln hergeleitet und angewendet und einfache Gleichungen gelöst. Dabei werden zwar auch komplizierte Terme benutzt und erfolgreich bearbeitet, trotzdem bleibt oft Grundsätzliches unverstanden (vgl. ebd., 4f.). Verschiedene Studien zu Fehlern bei der Durchführung von mathematischen Operationen zeigen, dass Operationen häufig auswendig gelernt, aber nicht nachvollzogen werden (siehe Kapitel 1.2).

Das „Verstehen eines Verfahrens" (Vollrath 2001, 52) ist mehr als die bloße Fähigkeit, einen Algorithmus oder eine Operation fehlerfrei und automatisiert anwenden zu können, insbesondere wenn das spezielle Verfahren nur für ein begrenztes Problemfeld funktioniert, die/der AnwenderIn es aber nicht auf verwandte Probleme übertragen kann. Beherrschen wird von Verstehen begünstigt, ist diesem aber nicht gleichzusetzen. Ein Verfahren ist erst dann verstanden, wenn sowohl sein Zweck, als auch der Algorithmus bekannt ist und angewendet werden kann, darüber hinaus bekannt ist, welche Voraussetzungen vorliegen müssen und vor allem, wenn verstanden ist, warum dieses Verfahren funktioniert, d. h. welche Idee damit verfolgt wird (vgl. ebd.). Übung führt zwar zu einem automatisierten und weitgehend fehlerfreien Beherrschen der Verfahren, verstanden sind sie dadurch aber noch nicht. Für ein Verstehen muss das Verfahren begründet und nachvollzogen werden (vgl. ebd., 55).

Ob eine Operation nur beherrscht wird oder auch verstanden ist, hängt auch mit der Gestaltung des Unterrichts zusammen. Vollrath (2001) unterscheidet zwischen systemorientiertem Lernen und problemorientiertem Lernen (vgl. ebd., 54 und 64). Als systemorientiert bezeichnet er einen Mathematikunterricht, dem ein vorgegebenes Bild der Mathematik als geordnetes Gebilde von Definitionen und Sätzen zu Grunde liegt, die gelernt werden sollen. Dahinter steht die Idee eines Lernens, das durch Merken und Nachvollziehen von vorgegebenen Gedanken geschieht (vgl. ebd., 55). Die SchülerInnen werden nicht dazu angeregt, auf kreative Weise eigene Lösungsideen zu produzieren und zu testen. Mathematik wird nicht als historisch gewachsenes und weiterhin im Wachstum befindliches Werkzeug zur Lösung realer Probleme verstanden. Als problemorientiert bezeichnet Vollrath Lernsituationen, die näher am mathematischen Forschen orientiert sind: Vorgegebene oder selbst gestellte Probleme regen zum Nachdenken an, die Lösungen werden erst hinterher systematisch geordnet – wobei auch das Finden einer systematischen Ordnung selbst wieder ein Problem darstellt. Der Mathematik wird somit ein auch für die SchülerInnen ersichtlicher Sinn verliehen, der sich auch auf die Motivation der Lernenden auswirkt (vgl. ebd., 65). Der Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe zielt darauf, dass Mathematik sowohl als bestehendes, systematisches Gebilde von Definitionen und Sätzen, das historisch gewachsen ist, aufgefasst wird, als auch als Werkzeug zur Anwendung in Realsituationen (vgl. Schulministerium 1999, 13). Der Lehrplan für die Sekundarstufe I gibt keine Sicht auf die Mathematik vor, zielt aber darauf ab, dass Mathematik genutzt werden kann, „um reale Problem mittels Modellbildung und -interpretation zu verstehen oder zu lösen" (Schulministerium 2007, 11). Die SchülerInnen sollen Mathematik auch außerhalb des Mathematikunterrichts gewinnbringend einsetzen können (vgl. ebd., 13). Diese Ziele entsprechen einer Sicht, wie sie einem problemorientierten Unterricht zu Grunde liegt. SchülerInnen betrachten die Mathematik aber dennoch allzu oft als ein fertiges, vorgegebenes Gebilde, dessen Regeln es auswendig zu lernen gilt. Diese Regeln werden ohne Begründung akzeptiert und angewendet, wodurch sich Regeln mitunter vermischen oder anschaulich völlig unmögliche Ergebnisse als richtig akzeptiert werden. Ein Verständnis von Mathematik als erweiterbares und flexibles Werkzeug fehlt, wird allerdings auch weder im Lehrplan der Sekundarstufe II noch in dem der Sekundarstufe II gefordert.

Aebli (2006) weist darauf hin, dass neu gelernte Verfahren immer in Verbindung mit bereits gelernten stehen und diese erweitern (vgl. ebd., 214). Vollrath (2001) sieht in dem „Anreichern von Wissen" (ebd., 61) aber auch die Gefahr, dass dadurch anderes wieder vergessen und der Zugriff auf das Wissen verzögert wird, wenn es mit vielen anderen Lerninhalten verknüpft ist. Im gleichen Werk kritisiert der Autor aber, dass Sachverhalte oft getrennt voneinander behalten werden und keine Beziehungen hergestellt werden. Er spricht von einer reinen „Ansammlung" (ebd., 101) von Wissen ohne Struktur. Ein langfristiges Lernen erfordert aber, dass Zusammenhänge hergestellt und aufeinander aufgebaut werden (vgl. ebd.). Das Verknüpfen mit Bekanntem und das inkrementelle Aufbauen auf Vorwissen erleichtert das Lernen von neuen Inhalten und den Aufbau neuer oder erweiterter Kompetenzen. Auch im Lehrplan für die Sekundarstufe I wird darauf hingewiesen, dass Kompetenzen „nicht einzeln und isoliert erworben" (Schulministerium 2007, 17) können, sondern dass es Beziehungen zwischen den Inhalten gibt.

2.1 Fachdidaktische Einordnung

Mathematik soll nicht verstanden werden als Sammlung von systematisch sortierten Aufgaben und Lösungen, sondern als Werkzeug, das dynamisch (weiter)entwickelt wird. Deswegen spielen auch die verschiedenen, von der Kultusministerkonferenz (2003) formulierten, prozessbezogenen Kompetenzen eine wichtige Rolle im Mathematikunterricht: *Modellieren*, *Problemlösen*, *Argumentieren*, *Darstellen*, *Kommunizieren* (vgl. ebd., 8f.) und der Umgang mit „symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik" bzw. *Rechnen* (ebd.), wozu explizit auch Terme und Gleichungen gezählt werden. Die Umsetzung im nordrhein-westfälischen Lehrplan orientiert sich an diesen Kompetenzen, was auch für die inhaltsbezogenen Kompetenzen gilt, die in den Bundesbildungsstandards von 2003 als „Leitideen" (ebd., 9) bezeichnet werden: *Zahl*, *Messen*, *Raum und Form*, *funktionaler Zusammenhang* sowie *Daten und Zufall*. Terme und Gleichungen spielen für mehrere Leitideen eine Rolle, beispielsweise zur Notation von „Rechengesetze[n]" (ebd., 10) (Leitidee Zahl) oder bei der Analyse von Funktionen (Leitidee funktionaler Zusammenhang).

Angelehnt an den Beschluss der Kultusministerkonferenz sind in den Lehrplänen in Nordrhein-Westfalen verschiedene sogenannte prozessbezogene und inhaltsbezogene Kompetenzen formuliert. Prozessbezogene Kompetenzen entsprechen den Kompetenzen im KMK-Beschluss und sind den fachlichen Inhalten übergeordnete Lernziele: *Argumentieren/Kommunizieren*, *Problemlösen*, *Modellieren*, und der Umgang mit mathematischen *Werkzeugen* (vgl. Schulministerium 2007, 12; vgl. Schulministerium 2004, 12). Sie sind nicht isoliert von mathematischen Inhalten, sondern werden immer im Umgang mit konkreten Inhalten erworben (vgl. Schulministerium 2007, 12). Die inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche entsprechen den Leitideen und beziehen sich auf konkrete mathematische Unterrichtsinhalte: *Arithmetik/Algebra*, *Funktionen*, *Geometrie* und *Stochastik* (vgl. Schulministerium 2007, 12; vgl. Schulministerium 2004, 12). Die Kompetenzbereiche werden in den Kernlehrplänen durch festgelegte inhaltliche Anforderungen konkretisiert. Dort werden die erwarteten Kompetenzen zum Zeitpunkt des Schulabschlusses und zu festgelegten Zeitpunkten während der Schulzeit festgelegt. Die Lehrpläne schreiben keine Methoden vor, sondern stellen „die erwarteten Lernergebnisse" (Schulministerium 2007, 9) in den Mittelpunkt. Die Verantwortung für die „inhaltliche, thematische und methodische Gestaltung" (ebd., 17) liegt somit bei den LehrerInnen, die im Sinne der individuellen Förderung den Unterricht an den Lernenden orientieren, indem sie auch Schwerpunkte festlegen oder zusätzliche Inhalte behandeln können.

Terme und Gleichungen haben eine zentrale Bedeutung für verschiedene inhaltsbezogene Kompetenzen, die die SchülerInnen im Laufe der Sekundarstufe I erwerben sollen. Im Kompetenzbereich *Arithmetik/Algebra* nimmt die mathematische Notation und Darstellung mathematischer Gedanken einen wichtigen Platz ein. Terme werden genutzt, um

„Rechengesetze" (Schulministerium 2007, 15) zu formulieren und um verschiedene Zahlenräume zu ergründen. Die Bedeutung der mathematischen Formelsprache, über mathematische Probleme kommunizieren zu können, wird auch an anderen Stellen betont (ebd., 11). Explizit fordert der Lehrplan für die Sekundarstufe II am Gymnasium das Lösen von Gleichungen, wobei aber auch ausdrücklich zeichnerische Lösungen und Ausprobieren die Kompetenzerwartungen erfüllen (vgl. ebd.). Im Kompetenzbereich *Funktionen* haben Terme und Gleichungen insofern eine Bedeutung, dass Funktionen durch ihre Funktionsterme dargestellt werden sollen und mit funktionalen Zusammenhängen gerechnet werden soll (vgl. ebd.). Auch im Kompetenzbereich *Geometrie* kommen Terme und Gleichungen vor, beispielsweise bei der Berechnung von verschiedenen geometrischen Größen oder der Formulierung des Satzes des Pythagoras, der explizit im Kernlehrplan gefordert wird (vgl. ebd., 16).

In Verbindung mit den inhaltsbezogenen Kompetenzen spielen auch verschiedene prozessbezogene Kompetenzen eine Rolle. So können Terme und Gleichungen genutzt werden, um über mathematische Sachverhalte zu kommunizieren, um mathematische Aussagen zu überprüfen oder verschiedene Lösungswege zu vergleichen (Kompetenzbereich *Argumentieren/Kommunizieren*). Terme und Gleichungen können genutzt werden, um Probleme zu strukturieren, allgemeine Aussagen zu verstehen und auf Spezialfälle anzuwenden und Schlussfolgerungen zu ziehen (*Problemlösen*) und um lebensweltbezogene Probleme durch das Entwickeln und Interpretieren geeigneter mathematischer Modelle zu verstehen und zu lösen (*Modellieren*). Auch das Verwenden von *Werkzeugen* wie Formelsammlungen oder Computeralgebrasystemen spielt im Umgang mit Termen und Gleichungen eine Rolle.

Insgesamt soll der Mathematikunterricht die SchülerInnen in die Lage versetzen, Mathematik anzuwenden, um ihre Lebenswelt zu verstehen, über Mathematik zu kommunizieren und damit zur gesellschaftlichen Partizipation zu befähigen (vgl. Schulministerium 2007, 11).

Die ersten expliziten Kompetenzerwartungen in Bezug auf Termumformungen sind im Kernlehrplan für die Sekundarstufe I am Gymnasium für das Ende der Jahrgangsstufen sieben und acht festgelegt (vgl. ebd., 26). Im Gegensatz zu den unteren Jahrgängen, wo in Rechnungen in der Regel nur konkrete Zahlen vorkommen, werden hier erstmals Variablen eingeführt und abstrakte Gleichungen wie die binomischen Formeln behandelt. Ebenfalls für diese Jahrgänge fordert der Kernlehrplan die Behandlung von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen (vgl. ebd.). In der Jahrgangsstufe neun kommen quadratische Gleichungen und entsprechende als Gleichungen formulierte Umformungsregeln hinzu (vgl. ebd., 31). Mit der Einführung neuer Schreibweisen wie der Quadratwurzel kommen auch neue Rechenregeln hinzu, die in der Regel als Gleichungen formuliert werden. Für das Ende der Jahrgangsstufe neun fordert der Lehrplan die Kompetenz, zwischen der Darstellung einer Funktion durch ihren Graphen und durch Wertetabellen und der Darstellung durch ihren Funktionsterm wechseln zu können (vgl. ebd.). In der Regel werden hierfür Gleichungen zur Anwendung kommen.

Der Lehrplan für die Realschule ist fast wortgleich mit dem für die Sekundarstufe I am Gymnasium, es gibt nur marginale Unterschiede. So werden einige Kompetenzen wie das Wurzelziehen oder der Umgang mit linearen Gleichungssystemen am Gymnasium bereits am Ende der Jahrgangsstufe acht, an der Realschule erst am Ende der Jahrgangsstufe zehn erwartet (vgl. Schulministerium 2007, 26; vgl. Schulministerium 2004, 29). Auf das Lösen von exponentiellen Gleichungen durch Probieren, das an der Realschule am Ende der Klasse 10 erwarten wird (vgl. Schulministerium 2004, 29), wird am Gymnasium zugunsten der Schulzeitverkürzung verzichtet. Grundsätzlich werden von RealschülerInnen am Ende der Sekundarstufe I vergleichbare, fast identische Kompetenzen erwartet wie von GymnasiastInnen.

Neben den durch die Lehrpläne festgelegten Kompetenzerwartungen haben die verwendeten Schulbücher einen großen Einfluss auf die Unterrichtsinhalte und -methoden, orientieren sich aber ihrerseits natürlich an den Kernlehrplänen. In Hinblick auf die Zusammensetzung der Schülerschaft am Oberstufen-Kolleg und das durchschnittliche Kompetenzniveau nach der Aufnahme (siehe Kapitel 3.1) erscheint es sinnvoll, eine Übersicht über die behandelten Themen der Sekundarstufe II anhand einer Schulbuchserie für die Realschule zu erstellen. In der Schulbuchreihe „Mathematik heute" (Griesel et al. 2005a bis 2008b) für Realschulen werden Zahlen erstmals in der Geometrie der fünften Klasse durch allgemeine Buchstaben repräsentiert (vgl. Griesel et al. 2005a, 159) und der Flächeninhalt des Rechtecks allgemein durch die Gleichung „$A = a \cdot b$" (ebd., 209) angeben. In der Ausgabe für die sechste Klasse werden Variablen ebenfalls ausschließlich im geometrischen Kontext verwendet. In der siebten Klasse wird erstmals eine Ungleichung von Variablen angegeben (vgl. Griesel et al. 2006, 129), ebenfalls in der Geometrie. Bei der Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks wird erstmals die Bruchschreibweise der Division mit Variablen benutzt (vgl. ebd., 151). Die erste Verwendung von Variablen außerhalb der Geometrie findet beim Vergleichen von rationalen Zahlen statt: „Welche ganzen Zahlen darfst du für x einsetzen?" (ebd., 184). Erste Gleichungen werden ohne standardisiertes Verfahren gelöst (ebd., 192). Im Vordergrund, d. h. nicht einem anderen Thema untergeordnet und formal behandelt, stehen Terme in der Jahrgangsstufe acht (Griesel et al. 2007, 6ff.), wobei Termumformungen und Gleichungen behandelt werden. Gleichungen werden durch Probieren und Umstellen gelöst (vgl. ebd., 22ff.). Funktionsterme werden ebenfalls erstmals in der achten Klasse angegeben (vgl. ebd., 144), wobei sie erstmals in der neunten Klasse so bezeichnet werden (vgl. Griesel et al. 2008a, 6). Lineare Gleichungssysteme werden grafisch (vgl. ebd., 42ff.) und algebraisch gelöst (vgl. ebd., 46ff.). Auch quadratische Gleichungen werden in der neunten Klasse behandelt (vgl. ebd., 228ff.). In der zehnten Klasse werden erstmals neben den Variablen in einem Funktionsterm Parameter angegeben und Funktionenscharen untersucht (vgl. Griesel et al. 2008b, 8).

Auch der Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe gibt inhaltliche und prozessbezogene Kompetenzen für ein selbstbestimmtes Leben, zum Verstehen der Alltagswelt und zur Bearbeitung komplexer Probleme als wesentliche Ziele des Mathematikunterrichts vor (vgl. Schulministerium 1999, 5), wenn auch mit anderen Begriffen als im Lehrplan für die

Sekundarstufe I. Anstelle von inhaltsbezogenen Kompetenzen werden im Lehrplan für die Oberstufe verschiedene mathematische „Ideen" (ebd., 6ff.) der Mathematik benannt, die in der Schule behandelt werden sollen. Terme und Gleichungen werden an dieser Stelle nicht ausdrückt genannt, werden im Unterricht aber dennoch eine wichtige Rolle spielen. So ist das Lösen von Gleichungen beispielsweise zentral für die Herleitung oder Anwendung vieler Algorithmen, beim Modellieren und in der linearen Algebra. Der Lehrplan für die Sekundarstufe II setzt einen sicheren Umgang mit der mathematischen Notation, mit Termumformungen und einfachen Gleichungen voraus und baut darauf auf.

2.2 Fehlvorstellungen und typische Fehler

Studien über Schülerfehler im Mathematikunterricht zielten zunächst lediglich darauf ab, mögliche Fehler aufzulisten und zu kategorisieren (vgl. Radatz 1980, 22). Deutlich wurde dabei die große und unüberschaubare Anzahl verschiedener Fehler. So machte Cox (1975) allein in den Algorithmen zum schriftlichen Subtrahieren, Addieren, Multiplizieren und Dividieren 223 unterscheidbare systematische Fehler aus (vgl. ebd., 208). Es ging in diesen Studien aber nicht darum, etwas über die Ursachen der Fehler zu erfahren, über zu Grunde liegende Fehlvorstellungen oder über mögliche Ansätze, um sie zu überwinden. Erst seit den achtziger Jahren werden die Ursachen für Fehler und die Denkprozesse, die zu Fehlern führen, gesucht und untersucht (vgl. Vollrath 1994, 9). Es wurde deutlich, dass verschiedene Fehler auf den gleichen Ursachen beruhen können oder verschiedene Ursachen zu den gleichen Fehlern führen können. Die Erkenntnisse haben mittlerweile auch Einfluss auf den Unterricht, beispielsweise durch eine Thematisierung in der Lehrerausbildung oder bei der Entwicklung von Schulbüchern, in denen auf mögliche Fehler hingewiesen wird, um ihnen so zu begegnen (vgl. ebd., 10).

Die an dieser Stelle zusammengetragenen Fehler und Fehlerursachen im Umgang mit Termen und Gleichungen beruhen größtenteils auf den Arbeiten von Radatz (1980), Malle (1993) und Vollrath (1994). Aufbauend auf Studien mehrerer anderer AutorInnen stellen sie eine Übersicht von verschiedenen Fehlern zusammen. An manchen Stellen bleibt allerdings unklar, woher diese Erkenntnisse stammen, ob sie üblich sind oder ob sie nur in Einzelfällen beobachtet wurden. Während Radatz allgemeine Ursachen für Fehler benennt und bei konkreten mathematischen Inhalten zumeist in der Arithmetik bleibt, beziehen Malle und Vollrath sich in ihren Darstellungen auf typische Schwierigkeiten der Schulalgebra.

2.2.1 Hürden der mathematischen Notation

Krauthausen und Scherer (2007) unterscheiden zwischen „Konventionsverstößen, Rechenfehlern und Denkfehlern" (ebd., 203). Viele typische Fehler, die im Zusammenhang mit der Formelsprache der Mathematik stehen, zeigen aber, dass diese Fehlertypen nicht isoliert voneinander betrachtet werden können, weil Konventionsverstöße Rechenfehler und Denkfehler nach sich ziehen können (und andersherum), wenn durch die Konvention Assoziationen ausgelöst werden. Die Formelsprache ist nicht „natürlich", sondern muss erlernt werden. Unsere heutige mathematische Notation entstand in einem Prozess, der Jahrhunderte gedauert hat. Zweifellos hat die herausgebildete Notation viele Vorteile gegenüber vielen anderen denkbaren Notationen, beispielsweise ist sie schneller niederzuschreiben als eine grammatikalisch korrekt verbalisierte Darstellung. Die durch Übung entstandene Leichtigkeit, mit der MathematiklehrerInnen mit der mathematischen Schreibweise umgehen, darf sie aber nicht zu der falschen Annahme verleiten, dass diese Notation intuitiv verstanden werden kann. Wie das Alphabet muss die Notation, die im Laufe eines Schülerlebens ständig erweitert wird, zunächst gelernt werden, bevor mit ihr gearbeitet werden kann (vgl. Baruk 1989, 31). Und sie enthält viele Stolpersteine, die zu Fehlern in ihrem Umgang führen können. Ein Beispiel ist die Regel „Punkt-vor-Strichrechnung" die als reine Konvention auch andersherum hätte lauten können.

Weitere Schwierigkeiten bilden sich durch Inkonsistenzen der Notation. So werden beispielsweise Operatoren nicht immer einheitlich mit dem Operanden verknüpft, sondern je nach Operation wird der Operator einmal links, einmal rechts vom Operanden geschrieben, einmal wird ein zusätzliches Symbol benötigt: 3a, a^3, a + 3 usw. Was eigentlich der Unterscheidung zwischen den Operationen dienen und die Schreibweise knapp halten soll, kann bei Ungeübten Verwirrung stiften und zur Verwechslung von Operationen führen. So können Fehler wie $2^3 = 6$ oder 3a – a = 2 entstehen (vgl. Vollrath 1994, 84). Eine andere Inkonsistenz besteht in der Konvention, den Malpunkt in der Multiplikation weglassen zu können, bei der syntaktisch verwandten Addition jedoch nicht (vgl. ebd.). Hinzukommt die Schwierigkeit, dass sich die Bedeutung des Nebeneinanderschreibens von Ausdrücken scheinbar im Laufe einer Schullaufbahn verändert: In den unteren Jahrgängen bedeutet Nebeneinanderschreiben, dass eine Addition vorgenommen wird, beispielsweise in 13 = 10 + 3 oder in $4\frac{3}{4}=4+\frac{3}{4}$, beim ersten Auftauchen von Variablen steht es aber scheinbar plötzlich für eine implizite Multiplikation: 3xy (vgl. Malle 1993, 135f.). Dieser Widerspruch, den sowohl LehrerInnen als auch SchülerInnen vermutlich gar nicht bewusst als solchen wahrnehmen, kann zu Fehlern wie $4x = 10 \Rightarrow x = 6$ oder 3 + a = 3a führen (vgl. Vollrath 1994, 91). In der Tat ist die Verwechslung von Operationen ein häufiger Fehler in der Schule. Verwechselt werden insbesondere Operationen, die didaktisch ähnlich eingeführt werden, wobei meist die elementarere Rechnung einer komplexeren vorgezogen wird: Addition statt Multiplikation, Subtraktion statt Division, Multiplikation statt Potenzieren (vgl. Malle 1993, 166; Vollrath 1994, 200). Letzteres, also Fehler wie $2^3 = 6$ oder $a^b=b^a$, ist der häufigste Fehler bei Potenzen (vgl. Vollrath 1994, 33).

Operationen werden sowohl beim Umgang mit konkreten Zahlen als auch bei Termen verwechselt: Typisch sind Verwechslung von Termen wie 2x und x^2 (vgl. ebd., 82). Beim Lösen von Gleichungen kann diese Verwechslung dazu führen, dass auf den beiden Seiten der Gleichung scheinbar unterschiedliche Operationen durchgeführt werden, ohne dass dies beabsichtigt wird (vgl. ebd., 191). Davon zu unterscheiden ist der Fehler, dass tatsächlich unterschiedliche Operationen auf den beiden Seiten der Gleichung vorgenommen werden, weil ein Verständnis für die Äquivalenz fehlt (siehe unten).

Auch die Bedeutung von Operatoren wandelt sich im Laufe einer Schullaufbahn. In der Grundschule stellt ein „Rechenzeichen" (Griesel et al. 2005a, 70) eine „Rechenanweisung" (ebd.) dar, also eine Aufforderung zu einer Handlung (wie in „4 + 3" mit der Lösung „7"), in späteren Klassen werden sie aber auch als Teil eines Zahlnamens verwendet, z. B. x + 3 oder $\sqrt{x}$ (vgl. Malle 1993, 136f.). Ein Term wie „2b" wird als Ergebnis einer Rechnung daher nicht akzeptiert, da die Aufgabe „noch nicht zu Ende gerechnet" ist. Auch das Gleichheitszeichen wird von einer Aufforderung zu rechnen (wie in „2 · 6 =" mit der Lösung „12" oder „1 + □ = 9" mit der Lösung „8") zu einem Zeichen mit neuer Bedeutung, nämlich zu einem Vergleichszeichen (vgl. Malle 1993, 137), das die Gleichheit von Termen angibt oder auch zur Definition von Funktionen benutzt wird.

Eine weitere Hürde der Notation stellen Klammern dar. Formal sind die meisten der Verknüpfungen, die in der Schule vorkommen, nur für zwei Operanden definiert und Konventionen oder Assoziativgesetze erlauben das Weglassen von Klammern. In der Schule dagegen ist die Mathematik nicht so streng formalisiert und Klammern werden nicht weggelassen, wo es möglich ist, sondern hinzugefügt, wo es nötig ist. Klammern erlauben (aus Schülersicht) das Überwinden von Konventionen der Notation. Diese Sichtweise auf Klammern kann zu Schwierigkeiten bei der Anwendung des Distributivgesetzes führen, wenn nämlich der Faktor vor einer geklammerten Summe nur mit dem ersten Summanden multipliziert wird. Ein wichtiger Spezialfall ist die „Minusklammer", d. h. eine Klammer, vor der ein Minuszeichen steht. Durch die implizite, aber nicht geschriebene eins vor der Klammer, hat der Term nicht die übliche Form, mit der das Distributivgesetz eingeführt wird. Als typischer Fehler bei Termumformungen ergibt sich das Auflösen von solchen Klammern, z. B. 3a – (2a + b)=3a – 2a + b (vgl. Vollrath 1994, 82).

Neben der Notation kommt auch der fach- und umgangssprachlichen Formulierung im Mathematikunterricht eine wichtige Bedeutung zu. Im Zusammenhang mit Gleichungen ist beispielsweise die Sprechweise problematisch, dass ein Summand „auf die andere Seite" (ebd., 192) gebracht wird, wobei ein Wechsel des Vorzeichen vorgenommen werden muss, denn bei dieser Sprechweise wird nicht deutlich, dass auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation durchgeführt wird. Diese von der Lehrkraft eingeführte und von den Lernenden übernommene Formulierung kann daher eine ungenaue Vorstellung vom Umgang mit Gleichungen erzeugen. Tatsächlich besteht ein häufiger Fehler beim Lösen von Gleichungen darin, dass auf beiden Seiten der Gleichung unterschiedliche Operationen durchgeführt werden.

Wenn auf einer Seite eine Subtraktion, auf der anderen Seite eine Addition oder auf einer Seite eine Division, auf der anderen Seite eine Multiplikation vorgenommen wird, spricht dies für die Vorstellung, dass ein Term „auf die andere Seite" gebracht wird (vgl. ebd., 201). Wenn eine Operation nur auf eine Seite angewendet wird, fehlt ebenfalls offenbar ein Verständnis dafür, dass die Gleichheit beim Lösen einer Gleichung in jedem Schritt gilt und die Gleichungen aller Schritte äquivalent zueinander sind.

2.2.2 Die Lernbiographie

Wie durch die obige Diskussion der Bedeutungsänderung der Notation im Laufe der Schulzeit bereits angedeutet, hat die Lernbiographie der einzelnen SchülerInnen Auswirkungen auf spätere Fehler oder den späteren Lernerfolg. Im Zusammenhang mit Termen und Gleichungen in der Oberstufe gilt dies vor allem – wie sich auch in den Interviews am Oberstufen-Kolleg zeigt – für die Bruchrechnung. Das Rechnen mit einfachen Brüchen ist für die Jahrgänge fünf und sechs vorgesehen und wird in den Jahrgangsstufen sieben und acht erweitert (vgl. Schulministerium 2007, 21 und 26). Terme, die nicht-ganzzahlige, rationale Koeffizienten enthalten, können nur vereinfacht werden, wenn die SchülerInnen mit Brüchen (und ggf. auch mit negativen Zahlen) umgehen können (Vollrath 1994, 78).

Die Lernbiographie stellt auch deswegen einen wichtigen Faktor dar, weil sie Auswirkungen auf die Bildung von Vorstellungen neuer mathematische Inhalte hat. Fehler können dadurch entstehen, dass mathematische Inhalte durch die Lernenden nicht mit Vorstellungen unterlegt werden, sondern auf bereits bestehende Vorstellungen zurückgegriffen wird, die in anderen Zusammenhängen sinnvoll sind (vgl. Fischbein et al. 1990, 28). So können sich systematische Fehler bilden, die aber wegen der bereits etablierten Vorstellungen sehr gefestigt sind. Fischer et al. konnten auch zeigen, dass eine andere Formulierung einer Aufgabenstellung dazu führen kann, dass auf eine andere Vorstellung zurückgegriffen wird (vgl. ebd., 27).

2.2.3 Automatisierung

Fehler treten insbesondere dann auf, wenn Verfahren nicht verstanden, sondern nur auswendig gelernt werden, um sie beherrschen zu können. Dies begünstigt Fehler, die durch Analogien und Assoziationen in der Notation induziert werden, aber auch Fehler, die vermieden worden wären, wenn ein Ergebnis mit etwas „gesundem Menschenverstand" betrachtet worden wäre. Ein realistisches Problem mit realistischen Annahmen kann keine völlig unrealistische Lösung haben. SchülerInnen werden aber in der Schule darauf trainiert, die Zahlen einer Textaufgabe so miteinander zu kombinieren, dass die Rechnung irgendwie plausibel erscheint. Eine weitere Beschäftigung mit dem Problem ist in der Regel nicht nötig. So sind SchülerInnen im Mathematikunterricht (und nur dort) bereit, das Alter eines Kapitäns anhand der geladenen Fracht zu berechnen (vgl. Baruk 1989, 32). Baruk (1989) diskutiert über im Unterricht trainierte, aber nicht verstandene Tricks oder Rechenregeln, die zu „Automathismen [sic]" (ebd., 34) im Denken führen und auf Probleme mit anderen Voraussetzungen übertragen werden. Tatsächliche Überlegungen werden nicht mehr angestellt und der Mathematikunterricht erreicht das Gegenteil seiner eigentlichen Intention.

Bis vor einigen Jahrzehnten war ein auf das automatisierte Berechnen angelegter Mathematikunterricht allerdings noch völlig üblich. Auch die mathematikdidaktische Forschung beschäftigte sich mit Fehlern, die beim automatisierten Berechnen auftreten. In den Studien, auf die Radatz (1979) sich bezieht, und die für ihre Zeit typisch sind, geht es in der Regel ausschließlich um Fehler, die durch falsches Anwenden oder Vermischen von auswendig gelernten, aber womöglich unverstandenen Algorithmen, entstehen.

Gesucht wurde mehr nach den Fehlerquellen der Algorithmen als nach Ursachen von Fehlvorstellungen. Als Fehlerquellen der Algorithmen wurden vor allem Verhören, Verschreiben, Vermischen von verschiedenen Algorithmen und kognitive Schwierigkeiten auf der Seite der Lernenden ermittelt (vgl. ebd., 30).

Begünstigt wird eine solche automatisierte Herangehensweise an Mathematikaufgaben – inbesondere an Textaufgaben – durch sprachliche Barrieren wie fehlendes Textverständnis (vgl. Radatz 1980, 37ff.). Eine Hürde können dabei alltagssprachliche Begriffe wie „Funktion" oder „Produkt" sein, die fachsprachlich in anderer Bedeutung verwendet werden. Und so sind „Schwierigkeiten im Sachrechnen […] nur in den seltensten Fällen" (Lorenz/Radatz 1993, 143) durch rechnerische Schwierigkeiten begründet. Ähnliche Schwierigkeiten gibt es bei der Interpretation von Darstellungen (vgl. Radatz 1980, 37ff.).

Eine weitere für Gleichungen spezifische Schwierigkeit, die durch eine formalisierte und automatisierte, aber nicht verständnisorientierte Bearbeitung entsteht, besteht darin, dass nicht berücksichtigt wird, dass Lösungen durch Umformungen (z. B. Quadrieren und Wurzelziehen) hinzukommen oder verloren gehen können (vgl. Vollrath 1994, 223).

2.2.4 Schemata und ihre Folgen

In der Kognitionspsychologie wird Faktenwissen häufig als Netzwerk dargestellt. Einzelne Sachverhalte sind als Knoten dargestellt, die Kanten stehen für gelernte Verbindungen. Beim Lernen wird das Netzwerk um Knoten und Kanten erweitert, beim Vergessen fallen dagegen Knoten und Kanten weg (vgl. Vollrath 2001, 104). Zusammenfassen (Chunking) und Abstraktion von Sachverhalten bedeutet eine Vereinfachung des Graphen. Eine Fehlerquelle besteht somit in einer unzulässigen Vereinfachung durch Verallgemeinerung von speziellen Sachverhalten. Das Abstrahieren ist ein wichtiger Teil des Mathematiklernens. Mathematische Sachverhalte werden nicht nur für Spezialfälle gelernt, sondern als verallgemeinerte, abstrakte Schemata (Regeln) gemerkt. Das birgt aber die Gefahr, dass auch unzulässige Verallgemeinerungen stattfinden: Übergeneralisierung. Ein Beispiel dafür ist die analoge Übertragung der binomischen Formen auf die Multiplikation: Die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ wird verallgemeinert zum Schema $(a \diamond b)^2 = a^2 \diamond 2ab \diamond b^2$ und dann bei der Multiplikation als $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot 2ab \cdot b^2$ angewendet. Ein anderes Beispiel ist die Abstraktion von $a + 0 = a$ und $a \cdot 1 = a$ zu „$a \diamond$ *besondere Zahl* = a", was zu den typischen Fehlern $a \cdot 0 = a$ oder $a \cdot \frac{1}{a} = 0$ führen kann (vgl. Malle 1993, 172ff.). Das „Weglaßschema" (ebd., 176ff.) beim Rechnen mit rationalen Zahlen, das aus der Übergeneralisierung des Kürzens entsteht, führt zu Fehlern wie $\frac{a \cdot b + c}{a \cdot d} = \frac{b + c}{d}$ oder $\frac{a \cdot x + b \cdot y}{x + y} = a + b$.

Das durch Verallgemeinerung auf Summen übertragene Kürzen wie in $\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c}$ stellt einen häufigen Fehler bei Termumformungen dar (vgl. Vollrath 1994, 82).

Ein Sonderfall von übergeneralisierten Regeln sind unzulässige Linearisierungen, d. h. die Umformung eines Terms der Form $\Diamond(a + b)$, wobei $\Diamond$ eine Operation auf die Summe a + b ist, zu $\Diamond(a) + \Diamond(b)$. Ein Beispiel ist die unzulässige Linearisierung bei der Addition von Kehrwerten wie bei der Berechnung von elektrischen Widerständen: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Rightarrow R=R_1+R_2$ (vgl. Malle 1993, 175) oder die Linearisierung des Kehrwerts selbst: $\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$ (vgl. ebd., 171). Auch beim Wurzelziehen besteht ein häufiger Fehler im Linearisieren: $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ (vgl. Vollrath 1994, 82).

Auch die Übergeneraliserung von „Regeln über Regeln", sogenannter Metaschemata, ist möglich. Beispielsweise kann aus der Regel $x\cdot y=0\Rightarrow x=0\vee y=0$ zusammen mit dem Metaschema „Bei Formeln kommt es nicht auf Zahlen an" das fehlerhafte Schema $x\cdot y=2\Rightarrow x=2\vee y=2$ gebildet werden (vgl. Malle 1993, 179f.).

Übergeneralisierungen können auch bewusst durchgeführt werden, wenn ein Schüler bei der Lösung einer Aufgabe mit seinem Wissen nicht weiterkommt und eine Verallgemeinerung als „Reperatur-Handlung [sic]" (Lorenz/Radatz 1993, 27) einsetzt, in der Hoffnung, richtig zu raten.

Die Übergeneralisierung kann durch die Notation begünstigt werden, der man nicht ansieht, welche Umformungen erlaubt sind, und welche nicht. Beispiele für Fehler, die durch solche unerlaubten Analogien durch die Notation entstehen, sind

- $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ analog zu $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$
- $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ analog zu $(a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2$
- $a^{b+c} = a^b + a^c$ analog zu $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ (vgl. Malle 1993, 161)
- $a + (b\cdot c) = (a + b)\cdot(a + c)$ analog zu $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$ (vgl. Vollrath 1994, 84).

Fehler durch Analogien treten nicht nur durch ähnliche Notationen auf, sondern z. B. auch durch ähnliche Formulierungen in Aufgabenstellungen (vgl. Radatz 1980, 37ff.).

Nicht nur durch Verallgemeinerungen können Fehler entstehen, auch durch ein enges Verständnis von Begriffen können Schwierigkeiten auftreten – z. B. durch die Vorstellung, dass eine Spiegelachse in einer Abbildung grundsätzlich vertikal verlaufen muss oder dass das „x" in einer Gleichung auf der linken Seite stehen muss (vgl. Vollrath 1994, 222). Eine Gleichung wie 15 = 3x wird dann zunächst umgeformt zu -3x = -15, was die Rechnung unnötig erschwert und Potenzial für Fehler birgt. Es fehlt ein Bewusstsein für die Symmetrie der Gleichheitsrelation. Ursache für zu eng gefasste Begriffe oder Schemata ist meist eine einseitige Präsentation im Unterricht (vgl. Radatz 1980, 37ff.).

2.2.5 Psychologische Faktoren

Der Wunsch, die Aufgabe zu lösen, dominiert mitunter gegenüber der Anwendung von Rechenregeln (vgl. Malle 1993, 206ff.). Um zum Ziel zu gelangen, werden also auch „Regeln" akzeptiert, die gar keine sind, aber ein schnelles Ende der Rechnung in Aussicht stellen. Im Zusammenhang dazu steht der pragmatische, im Alltag und in anderen Schulfächern häufig sinnvolle Ansatz, die Elemente einer Aufgabe, die sie schwierig und im Einzelfall unlösbar erscheinen lassen, wegzulassen. Dahinter steht die Erwartung, dass das Ergebnis des vereinfachten Problems der tatsächlichen Lösung zumindest nahe kommt, und dass es (auch im Hinblick auf eine Leistungsbewertung) besser ist, ein Problem „halbwegs" zu lösen, als gar nicht und wenigstens „das Beste zu geben". Wenn also die Gleichung $x + 4 = x + 2 + x^{-1}$ als unlösbar erscheint, liegt es für einige SchülerInnen nahe, wenigstens die Gleichung $x + 4 = x + 2$ zu lösen und nicht untätig zu bleiben. Das Weglassen von Teilen eines Terms stellt also eine willkürliche Vereinfachung dar. Eine andere Form der willkürlichen Vereinfachung besteht darin, für Parameter Werte zu wählen und somit nur noch einen speziellen Vertreter einer Schar von Problemen zu lösen, oder Teile der Aufgabenstellung nicht zu berücksichtigen, um die Komplexität zu reduzieren (vgl. Radatz 1980, 37ff.).

Vereinfachungen sind emotional durch den Wunsch begründet, schnell zu einem Ergebnis zu kommen. Ebenfalls emotional begründet ist eine impulsive Bearbeitung der Aufgaben: Die erstbeste Idee zur Lösung einer Aufgabe wird verfolgt, Alternativen werden nicht abgewogen (vgl. ebd.), d. h. der Lösungsprozess nach Kagan und Kogan (1970) ist unvollständig (siehe Kapitel 1.2).

Neben den emotionalen Faktoren gibt es andere psychologische Faktoren wie Unaufmerksamkeiten, die zu reinen Flüchtigkeitsfehlern führen, die aber nicht auf systematischen Fehlstrategien beruhen. Flüchtigkeitsfehler gehören zu den typischen Fehlern bei Termumformungen (vgl. Vollrath 1994, 91). Ähnlich ist das Vergessen von Zwischenergebnissen und dem Weiterrechnen mit einem anderen Wert (vgl. Radatz 1980, 37ff.). Aber auch solche Fehler können strukturelle Ursachen haben, wenn nämlich ein/e SchülerIn starke Probleme mit der Aufmerksamkeit oder dem Kurzzeitgedächtnis hat. Dann bietet sich eine spezifische Förderung dieser kognitiven Schwächen an.

3 Diagnostische Interviews am Oberstufen-Kolleg

Obwohl verschiedene Diagnoseformen seit Jahrzehnten eingesetzt werden, gibt es zu einigen nur wenig fachwissenschaftliche Literatur. Dies gilt insbesondere für die Diagnose im Mathematikunterricht der Oberstufe, da sich der Großteil der Literatur auf die Grundschule bezieht. Individuelle Förderung unter den Bedingungen von Heterogenität ist aber auch ein Thema in der Sekundarstufe II. Im Zuge der Inklusionsbestrebungen wird sich die Bedeutung in Zukunft noch erhöhen. Aufbauend auf den oben dargestellten Stand der mathematikdidaktischen Forschung wurde daher eine Diagnoseform in der Oberstufe erprobt. Es wurden Diagnoseinterviews zu den Themen Termumformungen und dem Lösen von Gleichungen durchgeführt, insgesamt also über die wesentlichen Kompetenzen der Schulalgebra in der Sekundarstufe I. Untersucht wurden die Fragestellungen:

1. Welche Ursachen haben die Rechenschwierigkeiten der interviewten KollegiatInnen beim Umgang mit Termen und Gleichungen?
2. Welche Aspekte müssen bei der Vorbereitung, Duchführung und Analyse von Diagnoseinterviews in der Oberstufe berücksichtigt werden? Wie unterscheiden sich Diagnoseinterviews in der Oberstufe von jenen mit jüngeren SchülerInnen?

Die Methodik, sowie Vor- und Nachbereitung der Interviews werden im Folgenden dargestellt. Die Interviewprotokolle finden sich im Anhang.

3.1 *Individuelle Förderung am Oberstufen-Kolleg*

Das Oberstufen-Kolleg Bielefeld ist eine Versuchsschule des Landes Nordrhein-Westfalen. Erforscht wird vor allem der Übergang zwischen Schule und Hochschule, aber auch die Erforschung neuer Lernformen im Hinblick auf Heterogenität gehört zum Forschungsauftrag. Die wissenschaftliche Begleitung des Schulversuchs erfolgt durch die Universität Bielefeld (vgl. APO-OS, §1). Auch das Lernen selbst ist am Oberstufen-Kolleg mit der Universität vernetzt. So können unter Umständen besuchte Veranstaltungen an der Universität als Unterrichtsleistung anerkannt werden (vgl. APO-OS §1 Abs. 3). An die Stelle der Leistungskurse der gymnasialen Oberstufe treten sogenannte Studienfächer, die ab dem zweiten Halbjahr zu besuchen sind (vgl. APO-OS §9 Abs. 1). Die Vernetzung schlägt sich auch im Sprachgebrauch wieder: Die Halbjahre werden als Semester bezeichnet, die Lernenden nennen sich nicht SchülerInnen, sondern KollegiatInnen (vgl. Boller et al. 2008a, 65), die LehrerInnen nennen sich Lehrende.

Um unter den Bedingungen großer Heterogenität forschen zu können, wird eine besondere Zusammensetzung der Schülerschaft durch das Auswahlverfahren sichergestellt, an dem die BewerberInnen teilnehmen. Die BewerberInnen führen vor der Aufnahme Gespräche, u. a. über Motivationen und Leistungen (vgl. Boller/Möller 2009, 28). Besonders für die SchülerInnen, die nicht auf dem traditionellen Bildungsweg zum Abitur gelangen, spielt individuelle Förderung eine wichtige Rolle (vgl. Boller et al. 2008b, 174).

Am Auswahlverfahren nehmen daher auch SchülerInnen ohne formale Zugangsberechtigung für die gymnasiale Oberstufe teil – fast jede/r zweite SchülerIn hat keinen für die Oberstufe qualifizierenden Schulabschluss. Etwa 40 Prozent der SchülerInnen haben einen Migrationshintergrund (Abschlussjahrgang 2006), was fast dem doppelten Wert durchschnittlicher Gymnasien (22,8 %) entspricht und leicht unter dem durchschnittlichen Wert für die Oberstufe an Gesamtschulen (53 %) liegt (vgl. Glässing/Sterzik 2008, 8).

Aufgrund der Heterogenität sind Diagnose und Förderung besonders nötig, wobei der Blick aber nicht nur auf SchülerInnen mit besonderen Schwierigkeiten gerichtet wird (vgl. Boller/Möller 2009, 28f.). Die BewerberInnen nehmen in den Fächern Mathematik, Deutsch und Englisch an einer Eingangsdiagnose teil, die darüber entscheidet, ob sie in dem entsprechenden Fach keinen, einen oder zwei sogenannte Brückenkurse besuchen müssen, um Inhalte aus der Sekundarstufe I aufzuarbeiten (vgl. APO-OS, §15). In den vergangenen Jahren lag die Zahl der KollegiatInnen, die einen Brückenkurs in Mathematik besuchen mussten zwischen 42 und 53,9 Prozent (vgl. WE OS 2010, 30). Zusammen mit den sogenannten Basiskursen sollen sie auf eine Studierfähigkeit hinarbeiten und eine Grundlage für die folgenden Schuljahre schaffen. Daneben gibt es Möglichkeiten für individuelle Formen der Leistungserbringung und -bewertung (vgl. Boller et al. 2008b, 178), ein großes Beratungsangebot (u. a. Berufsberatung und psychologische Beratung) und jede/r SchülerIn wählt sich eine bzw. einen der Lehrenden als persönliche/n AnsprechpartnerIn (vgl. Boller/Möller 2009, 29). Die KollegiatInnen berichten, dass ihnen die Möglichkeiten zur individuellen Beratung besonders wichtig sind (vgl. ebd., 31).

Im Rahmen des Schulversuchs werden verschiedene sogenannte Forschungs- und Entwicklungsprojekte am Oberstufen-Kolleg durchgeführt. Unter dem Leitthema *Individuelle Förderung unter Bedingungen der Heterogenität* erforschen vier Projekte mit verschiedenen Schwerpunkten Möglichkeiten zur individuellen Unterstützung. Das Projekt *Diagnose und Förderung für die Eingangsphase im Fach Mathematik* erforscht, wie die Mathematik-Eingangsdiagnose weiterentwickelt werden kann, um Aussagen über spezifische Förderbedarfe in Bezug auf inhaltsbezogene Kompetenzen treffen zu können (vgl. WE OS 2010, 31). Die Eingangsdiagnose hatte zunächst ausschließlich die Funktion, darüber zu bestimmen, ob Brückenkurse in Mathematik besucht werden müssen, aber wurde nicht herangezogen, um spezifische Empfehlungen zu generieren. Darüber hinaus entwickelt das Projekt Förderangebote und zusätzliche diagnostische Elemente (vgl. ebd.). An dieser Stelle gibt es Schnittpunkte zwischen der vorliegenden Arbeit und dem Forschungs- und Entwicklungs-Projekt.

Die mathematischen Kompetenzen der KollegiatInnen zu Beginn ihrer Ausbildung am Oberstufen-Kolleg liegen in etwa auf einer Stufe mit denen von SchülerInnen an Realschulen (vgl. Brandt 2008, 259f.). Auf Grund der notwendigen Extrapolation der Daten – die Realschule endet nach dem zehnten Schuljahr, darüber hinaus lagen Messdaten nur für das achte Schuljahr vor (vgl. ebd.) – ist dieser Vergleich allerdings als sehr unsicher einzustufen. Am Ende der Schulzeit liegt die mathematische Kompetenz im Durchschnitt zwischen der von SchülerInnen von Fachoberschulen und von Berufsschulen, aber deutlich unter der von AbiturientInnen traditioneller Gymnasien (vgl. ebd., 260). Die Erprobung von Diagnosemethoden und die Erweiterung des Förderangebots liegt daher im Interesse der Schule und des Forschungs- und Entwicklungsprojektes.

Mit KollegiatInnen des Oberstufen-Kollegs wurden für diese Arbeit diagnostische Interviews durchgeführt, in denen Kompetenzen bei Termumformungen und dem Lösen von Gleichungen getestet wurden. Ziel war neben der Entwicklung individueller Förderangebote insbesondere die Erforschung und Erprobung der Diagnosemethode am Oberstufen-Kolleg. Entsprechend des Grundsatzes der Schule, dass in den ersten beiden Semestern unter anderem die „Förderung basaler Kompetenzen und Ausgleich von Defiziten im Mittelpunkt" (Boller/Möller 2009, 29) steht, sollte der Schwerpunkt auf KollegiatInnen gelegt werden, die einen Mathematik-Brückenkurs während der Eingangsphase (das erste Jahr am Oberstufen-Kolleg) belegen. Diese Zielgruppe musste aber im Verlauf der Vorbereitungen erweitert werden (siehe Kapitel 3.2).

3.2 Methodik

Vor der Erstellung der Interviewaufgaben wurde die Eingangsdiagnose ausgewertet, um einen Eindruck der typischen Schwierigkeiten der KollegiatInnen zu erhalten. Da zu diesem Zeitpunkt nicht feststand, welche KollegiatInnen an den Interviews teilnehmen würden, konnten nicht die speziellen Bögen dieser Personen analysiert werden, was sicherlich sinnvoll gewesen wäre. Durch die Auswertung mehrerer Diagnosebögen (siehe Kapitel 3.3) konnten aber wichtige Erkenntnisse gewonnen werden, die bei der Erstellung und Auswahl der Diagnoseaufgaben hilfreich waren.

Für die Interviews wurden letztendlich sechs Aufgaben erstellt, von denen drei Aufgaben analog zu Aufgaben der Eingangsdiagnose sind. Zusätzlich zu diesen drei Aufgaben wurden den Interviewten drei kompetenzorientierte Aufgaben gestellt. Für die Interviews wurde jeweils eine Aufgabe auf ein DIN-A4-Blatt gedruckt und den KollegiatInnen vorgelegt. Unter der Aufgabenstellung befand sich ausreichend Platz für die Lösungsmitschrift. Die Mitschriften der Interviews finden sich im Anhang.

Es wurde ein Leitfaden mit Standardaufforderungen und -fragen erstellt, der sich an einem Leitfaden bei Hafner/vom Hofe (2008) orientiert, aber stellenweise im Sprachgebrauch und inhaltlich an die Interviewsituation, insbesondere im Hinblick an das Alter der TeilnehmerInnen, angepasst wurde (vgl. ebd., 15). Der Leitfaden ist im Anhang abgedruckt (S. 74). Er enthält eine Einleitung, in denen die KollegiatInnen auf den Zweck, Dauer und Methodik der Interviewstudien hingewiesen werden. Die Einleitung wurde zu Beginn jedes Interviews frei vorgetragen und gefragt, ob es noch Verfahrensfragen gibt. Danach wurde mit der ersten Aufgabe begonnen. Im weiteren Verlauf der Interviews wurde der Leitfaden als roter Faden benutzt. Aufgrund der Individualität der Interviews bestand aber keine Notwendigkeit, sich strikt daran zu halten. Vielmehr wurde versucht, auf die Situation zu reagieren. Im Laufe der Interviews stellte sich aber auch heraus, dass es schwierig ist, einerseits auf die aktuelle Situation einzugehen und andererseits die Orientierung am Leitfaden beizubehalten. Da das Ziel der Interviews aber in der Erprobung der Methode für den unterrichtsbegleitenden Einsatz und in der Diagnose der Kompetenzen der einzelnen KollegiatInnen lag, nicht aber darin, verallgemeinernde Aussagen zu generieren, erscheint die Abweichung vertretbar.

Von den Interviews wurde jeweils eine Audio-Aufzeichnung vorgenommen, die anschließend transkribiert wurde. Die vollständigen Transkripte sind im Anhang zu finden. Die Transkription wurde Wort für Wort vorgenommen und nicht nur sinngemäß, wobei auch Fülllaute wie „äh" oder Wort- und Satzteilwiederholungen wie „weil, weil" (Transkript Eduard, Z. 171) aufgenommen wurden, da diese Stellen möglicherweise Schwierigkeiten mit der Aufgabe kennzeichnen. In den meisten Fällen handelt es sich aber wohl nur um Schwierigkeiten mit der Verbalisierung, nicht mit der Mathematik, oder um schlichte Angewohnheiten. Pausen im Sprechen wurden in den Transkripten gekennzeichnet. Die Transkripte wurden um die Mitschriften ergänzt, die an der jeweiligen Stelle vorgenommen wurden. Aus den Transkripten geht allerdings nicht immer eindeutig hervor, ob die Mitschrift verfasst wurde, nach, vor oder während die/der TeilnehmerIn etwas sagt.

Ursprünglich war geplant, ca. sechs Interviews mit TeilnehmerInnen der Brückenkurse durchzuführen. Mehrere Teilnahmeaufrufe blieben allerdings ohne Resonanz, was wohl hauptsächlich daran liegt, dass die Aufrufe per E-Mail und per Postfach kurz vor den Sommerferien erfolgten. Zu dieser Zeit fand an der Schule Projektunterricht statt, weswegen die Brückenkurse nicht mehr stattfanden und die Möglichkeit, direkt in den Kurs zu gehen das Vorhaben vorzustellen, nicht bestand. Rückblickend hätten die TeilnehmerInnen daher mindestens zwei Wochen eher angesprochen werden müssen. Stattdessen wurden einige Projekte besucht, um KollegiatInnen für die Teilnahme zu gewinnen. Der mögliche Teilnehmerkreis wurde erweitert, es wurde jedoch darauf hingewiesen, dass es sich um eine Untersuchung über Schwierigkeiten handelt und die TeilnehmerInnen jeweils individuelle Ratschläge zur Kompetenzsteigerung erhalten und sich die Teilnahme daher besonders für die KollegiatInnen aus den Brückenkursen lohnt. Insgesamt wurden sechs Einzelinterviews geführt, die jeweils ca. 30 Minuten dauerten. Auffällig ist, dass sich darunter keine SchülerInnen mit (offensichtlichem) Migrationshintergrund finden, obwohl der Anteil dieser KollegiatInnen an der Schule bei 40 Prozent liegt. Auffällig ist auch, dass unter den sechs TeilnehmerInnen nur ein Teilnehmer einen Brückenkurs besucht, obwohl um diese besonders geworben wurde. Eine mögliche Erklärung ist, dass die SchülerInnen der Brückenkurse eine Bloßstellung durch die Diagnose befürchten und deswegen ungern teilnehmen. Die ursprünglich ins Auge gefasste Zusammensetzung der TeilnehmerInnen konnte nicht eingehalten werden, die durchgeführten Interviews waren aber dennoch aufschlussreich und lehrreich.

3.3 Auswertung der Eingangsdiagnose

Von den SchülerInnen, die an der Eingangsdiagnose für die Aufnahme zum Beginn des Schuljahres 2012/2013 teilgenommen haben, wurden 204 SchülerInnen aufgenommen. Zu acht übergeordneten mathematisch Themenbereichen wie „Prozentrechnung", „Problemlösen" oder „Proportionalität" wurden jeweils fünf Aufgaben mit einer eindeutigen

Lösung gestellt. Die Lösung muss dabei in einen Lösungskasten unter der Aufgabe eingetragen werden, daneben ist Platz für Rechnungen gelassen, die aber nicht in die Bewertung einfließen. Wie in Kapitel 1.3 dargelegt, lässt es eine solche Form der Leistungsüberprüfung kaum zu, auf zu Grunde liegende Fehlvorstellungen zu schließen und kann somit nur als pragmatischer Ansatz gesehen werden, der großen Zahl der TeilnehmerInnen gerecht zu werden, um einen möglichen Förderbedarf zu entdecken. Die Auswertung der Methode im Rahmen des Forschungs- und Entwicklungsprojekts *Diagnose und Förderung für die Eingangsphase im Fach Mathematik* ergab aber, dass sich die Eingangsdiagnose als „zufriedenstellendes Instrument" (WE OS 2010, 30) im Hinblick auf Validität und Praktikabilität erwiesen hat. Die Lösungen werden auf Korrektheit überprüft und eine Gesamtpunktzahl gebildet, wobei ein Punkt pro Aufgabe vergeben wird. Eine näher gehende Untersuchung der Lösungen findet nicht statt. Die fehlende detaillierte Auswertung wird aber zum Teil durch die große Anzahl und die Vielfalt der Aufgaben ausgeglichen.

Von den 204 aufgenommenen SchülerInnen lösten 57,4 Prozent weniger als die Hälfte der 40 Aufgaben. Im Folgenden werden nur die Aufgaben eins bis zehn genauer betrachtet, da diese die Themenfelder Gleichungen (Aufgaben 1 bis 5) und Termumformungen (6 bis 10) abdecken. Dazu wurden 48 Bögen quantitativ ausgewertet und die Art des Fehlers untersucht. Zuvor wurden 20 Bögen für einen ersten Eindruck der unterlaufenen Fehler angesehen, aber nicht quantitativ ausgewertet. Bei diesen Bögen wurden auch die anderen Aufgaben betrachtet. Auffällig war, dass SchülerInnen, die Schwierigkeiten im Umgang mit Termumformungen und Gleichungen hatten, häufig auch Probleme mit allen anderen Bereichen der Diagnose hatten, während diejenigen SchülerInnen, die Termumformungen sicher durchführen und Gleichungen sicher lösen konnten, auch in den anderen Bereichen überdurchschnittlich waren. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die für Termumformungen und dem Lösen von Gleichungen nötigen Kompetenzen essenziell für die Schulmathematik sind.

In der Auswertung wurden die unterlaufenen Fehler gezählt. Sind einer Schülerin bzw. einem Schüler bei ein und derselben Aufgabe mehrere Fehler unterlaufen, wurden die Fehler einzeln gezählt. Da es sich hier um eine rein schriftliche Leistungsüberprüfung handelt und keine Rücksprache mit den TeilnehmerInnen zur Erörterung von aufgetretenen Fehler möglich war, war es nicht immer möglich, den Fehler anhand des Rechenweges zu erkennen. Dies gilt insbesondere für diejenigen Bögen, bei denen kein vollständiger Rechenweg angegeben war, sondern nur ein Ergebnis in den Lösungskasten eingetragen wurde. Somit zeigt auch diese Auswertung die Bedeutung von diagnostischen Interviews für die Diagnose von Fehlvorstellungen.

Die im Folgenden zitierten Zahlen zur Lösungshäufigkeit der Aufgaben wurden freundlicherweise vom Forschungs- und Entwicklungsprojekt *Diagnose und Förderung in Mathematik* für die vorliegende Arbeit zur Verfügung gestellt. Die quantitative Auswertung der 48 Bögen ergab bis auf sehr wenige Ausnahmen, dass beim Korrigieren der

Bögen keine Fehler unterlaufen sind, weswegen die genannten Lösungshäufigkeiten als korrekt angesehen werden. Die genannten Prozentwerte beziehen sich immer auf die Gesamtzahl der im Schuljahr 2012/2013 aufgenommenen SchülerInnen.

Da die Aufgaben womöglich auch in zukünftigen Schuljahren wieder in der Eingangsdiagnose verwendet werden, war eine Einsicht in die Diagnosebögen nur unter der Auflage möglich, dass Verschwiegenheit über die genauen Aufgabenstellungen gewahrt wird. Die Aufgaben werden daher in dieser Analyse nicht zitiert, sondern nur durch ihre charakteristischen Eigenschaften beschrieben.

Die erste zu lösende Aufgabe ist eine einfache lineare Gleichung der Form $ax - b = c$ mit einstelligen natürlichen Zahlen a, b und c und einem Ergebnis, das ebenfalls eine natürliche Zahl ist, d. h. a ist ein Teiler von $b + c$. Die Aufgabe wurde von 89,7 Prozent der aufgenommenen TeilnehmerInnen korrekt gelöst. In der Analyse wurden keine systematischen Schwierigkeiten festgestellt.

In der zweiten Aufgabe soll eine Gleichung vom Typ $\frac{a}{b}x = cx - d$ gelöst werden, wobei a, b, c und d einstellige, natürliche Zahlen und die Lösung x eine nicht-ganze, rationale Zahl ist. Sie wurde von 35,8 Prozent der aufgenommen TeilnehmerInnen gelöst. Tabelle 3.1 zeigt die absoluten Häufigkeiten der Fehler, die bei dieser Aufgabe identifiziert werden konnten. Besonders viele Fehler entstanden durch das Vertauschen von Subtrahend und Minuend, sodass das falsche Vorzeichen notiert wird. Genauer gesagt wurde cx auf beiden Seiten der Gleichung subtrahiert, aber auf der linken Seite wird $(c - \frac{a}{b})x$ statt $(\frac{a}{b} - c)x$ als Ergebnis angegeben. Der Grund könnte darin liegen, dass der Bruch kleiner ist als c und die kleinere von der größeren Zahl abgezogen wurde. Weitere Fehler entstehen durch die Notation, insbesondere von Brüchen, und das Operieren auf Gleichungen.

Anzahl	Fehler
5	Vertauschen von Subtrahend und Minuend (Vorzeichenfehler)
4	vermischen von Termen mit und ohne x: $\frac{1}{5}x+3=3\frac{1}{5}x$ (evtl. Nebeneinanderschreiben als implizite Addition interpretiert)
3	Rechnung nicht zu Ende geführt, Ergebnis der Form A x = B. Teilweise A als Lösung angegeben, teilweise B.
2	Interpretation von Kehrwerten als Dezimalbrüche: $\frac{1}{5}=0{,}5$, $\frac{1}{8}=0{,}8$
1	Nebeneinanderschreiben bei gemischten Brüchen als Multiplikation: $2\frac{1}{5}=2\cdot\frac{1}{5}$
1	Operation nur auf einer Seite der Gleichung
1	Division auf der einen, Subtraktion auf der anderen Seite der Gleichung (evtl. wird Nebeneinanderschreiben als Addition interpretiert)
1	Operation auf die Gleichung wird nur auf den ersten Term der Summe angewendet.

Tabelle 3.1: Fehler in Aufgabe 2 der Eingangsdiagnose

Die dritte Aufgabe ist eine quadratische Gleichung, wobei die quadratischen Terme nach Subtraktion auf beiden Seiten wegfallen und eine einfache lineare Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten und einer negativen, ganzzahligen Lösung übrig bleibt. Die Lösungshäufigkeit beträgt 45,6 Prozent. Tabelle 3.2 zeigt die identifizierten Fehler. Besonders häufig wurde ein Term auf einer Seite subtrahiert, auf der anderen Seite addiert. Womöglich wurde hier aber gar nicht auf beiden Seiten gerechnet, sondern ein Summand von der einen auf die andere Seite der Gleichung verschoben („auf die andere Seite gebracht”).

Anzahl	Fehler
9	Subtraktion auf einer Seite, Addition auf der anderen Seite der Gleichung (evtl. durch „Verschieben” eines Terms auf die andere Seite der Gleichung).
4	Linearisierung der Quadratwurzel (teilweise wirkt es nur auf x^2 und die anderen Terme bleiben unverändert)
2	Operation nur auf einer Seite der Gleichung
2	Vertauschen von Division und Subtraktion (evtl. Nebeneinanderschreiben als Addition interpretiert)
1	Zähler und Nenner vertauscht

Tabelle 3.2: Fehler in Aufgabe 3 der Eingangsdiagnose

Die vierte Aufgabe hat die Form $-ax + b = c(x - 1)$, wobei a, b und c einstellige, natürliche Zahlen sind. Die Lösung x ist der Kehrwert einer einstelligen, natürlichen Zahl. Sie wurde in 33,8 Prozent der Fälle gelöst. Dabei wurde allerdings zumeist gar keine Lösung eingetragen, sodass nur wenige systematische Fehler entdeckt werden konnten. Tabelle 3.3 zeigt die wenigen identifizierten Fehler.

Anzahl	**Fehler**
2	Operation links auf ganzen Term, rechts nur innerhalb der Klammer
1	Faktor vor der Klammer nur mit erstem Summand multipliziert.
1	c und 1 werden addiert und nicht multipliziert.

Tabelle 3.3: Fehler in Aufgabe 4 der Eingangsdiagnose

Die fünfte Aufgabe enthält neben dem gesuchten x und ganzzahligen Koeffizienten einen unbestimmten Parameter b und hat die Form $a(x - b) = c(x + db)$. Die Lösung ist ein ganzzahliges Vielfaches von b. Die korrekte Lösung wurde auf 34,3 Prozent der Bögen genannt. Die festgestellten Fehler sind in Tabelle 3.4 dargestellt. Wie zu erwarten treten Fehler durch die zusätzliche Variable auf.

Anzahl	**Fehler**
4	Willkürliche Vereinfachung: $b = 1$ oder $b = 0$ gesetzt
2	Rechnung vorzeitig beendet. Gleichung der Form $A\,x = B$ bleibt.
2	Addition auf einer Seite der Gleichung, Subtraktion auf der anderen (evtl. Verschieben eines Terms)
1	Faktor vor der Klammer nur mit erstem Summand multipliziert.
1	Vermischen von Termen mit und ohne x: $5x - 2 = 3x$ (evtl. Nebeneinanderschreiben als implizite Addition interpretiert)

Tabelle 3.4: Fehler in Aufgabe 5 der Eingangsdiagnose

Aufgabe sechs ist die erste Aufgabe, in der ein Term umgeformt, aber keine Gleichung gelöst werden soll. Sie besteht darin, die Koeffizienten in dem Term $ax^2 + bx + cx$ zusammenzufassen, wobei a, b und c einstellige natürliche Zahlen sind und x eine unbestimmte Variable ist. Die Aufgabe wurde von 63,7 Prozent der aufgenommenen TeilnehmerInnen korrekt gelöst. Die identifzierten Fehler zeigt Tabelle 3.5. Die starke Bindung des Exponenten in der Potenzschreibweise ist die häufigste Schwierigkeit.

Anzahl	**Fehler**
6	Der Exponent wirkt auch auf den Koeffizienten: $ax^2 = a^2 \cdot x^2$
4	Addition von Koeffizienten zu verschiedenen Potenzen, z. B. $ax^2 + bx = (a + b)\,x^2$

Tabelle 3.5: Fehler in Aufgabe 6 der Eingangsdiagnose

In der siebten Aufgabe sollte eine binomische Formel angewendet bzw. eine Klammer ausmultipliziert werden: $(x + a)^2$ mit einstelligem, natürlichem a und einer unbestimmten Variable x. Die Lösungshäufigkeit unter allen aufgenommenen SchülerInnen beträgt 44,1 Prozent. Tabelle 3.6 zeigt die identifizierten Fehler in der Stichprobe. Besonders häufig wird eine unzulässige Linearisierung vorgenommen.

Anzahl	**Fehler**
10	Linearisierung: $x^2 + a^2$
7	Verwechseln von Addition und Multiplikation: a^2x^2 oder $x^2 \cdot 2ax \cdot a^2$
2	Aufgabenstellung missachtet und stattdessen Nullstelle bestimmt
1	Willkürliche Vereinfachung: $x = 1$ gesetzt
1	Vorzeichenfehler durch Vermischung mit $(x - a)^2$

Tabelle 3.6: Fehler in Aufgabe 7 der Eingangsdiagnose

In der achten Aufgabe sollen zwei Terme miteinander multipliziert werden, wobei der eine ein lineares, der andere ein quadratisches Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Im Produkt fallen die linearen und quadratischen Terme weg. Diese Aufgabe wurde nur von 21,6 Prozent der aufgenommenen BewerberInnen gelöst. Tabelle 3.7 zeigt die identifizierten Fehler. Der häufigste Fehler tritt bei dem aus der Sekundarstufe II womöglich nicht gewohnten Exponenten 3 auf.

Anzahl	**Fehler**
7	Es wird $x^3 = x^2$ gesetzt (z. B. $x \cdot x^2 = x^2$)
3	Willkürliche Vereinfachung: $x = 1$ gesetzt oder x^2 weggelassen
1	Verwechseln von Multiplikation und Addition (evtl. Nebeneinanderschreiben als implizite Addition interpretiert)
1	Verwechseln von Multiplikation und Division

Tabelle 3.7: Fehler in Aufgabe 8 der Eingangsdiagnose

Die neunte Aufgabe besteht darin, bei einer Summe von zwei Summanden eine Variable auszuklammern, die in beiden Summanden in erster Potenz vorkommt. Die Lösungshäufigkeit beträgt 54,9 Prozent. In einigen Fällen wurde die Variable nur beim ersten Summanden ausgeklammert, ansonsten konnten keine systematischen Fehler identifiziert werden.

In der zehnten und letzten Aufgabe im Bereich Termumformungen soll wieder eine Variable aus einer Summe ausgeklammert werden, diesmal hat die Summe jedoch drei Summanden, wobei die Variable in einem Summand ein quadrierter Faktor ist. Ein anderer Summand besteht nur aus der auszuklammernden Variable, d. h. der Koeffizient ist eins. Die Aufgabe hat eine Lösungshäufigkeit von 16,7 Prozent. In 40,2 Prozent wurde auch keine falsche, sondern gar keine Lösung abgegeben, was für eine hohe Unsicherheit bei dieser Aufgabe spricht. Bei allen anderen Aufgaben war in höchstens 19,6 Prozent der

Abgaben keine Lösung eingetragen. Auffallend ist die hohe Differenz zwischen der Lösungshäufigkeiten der Aufgaben neun und zehn, obwohl die Aufgabenstellung sehr ähnlich ist. Die identifzierten Fehler sind in Tabelle 3.8 dargestellt.

Anzahl	Fehler
5	b mit Koeffizient 1 wurde nicht mit ausgeklammert
4	Aufgabenstellung wurde nicht verstanden: Term abgeschrieben und alle Koeffizienten weggelassen
2	Verwechslung von Addition und Multiplikation (evtl. Nebeneinanderschreiben als implizite Addition interpretiert)

Tabelle 3.8: Fehler in Aufgabe 10 der Eingangsdiagnose

Fehler treten insgesamt besonders häufig im Zusammenhang mit der Notation auf, insbesondere beim Nebeneinanderschreiben bei gemischten Brüchen und bei Koeffizienten und Variablen, durch verschiedene Operationen auf beiden Seiten einer Gleichung und durch zusätzliche Variablen. Diese Erkenntnisse sollen bei der Entwicklung der Aufgabenstellung genutzt werden. Einige der Aufgaben werden analog zu Aufgaben der Eingangsdiagnose erstellt, sodass eine genauere Ursachenanalyse typischer Fehler vorgenommen werden kann.

3.4 Entwicklung und Analyse der Aufgabenstellung

Ausgehend von den Erkenntnissen der Eingangsdiagnose und den Kriterien für gute Diagnoseaufgaben (siehe Kapitel 1.5) werden sechs Aufgaben für die Diagnoseinterviews entwickelt. Die ersten drei Aufgaben beziehen sich direkt auf die Eingangsdiagnose, die anderen Aufgaben sind stärker an den Kriterien Authentizität und Offenheit orientiert. Zu jeder Aufgabe werden Musterlösungen auf Schulniveau erstellt und es werden mögliche Fehler aufgestellt. Die Aufzählung der Fehler ist natürlich nicht vollständig, es ist immer möglich, dass in den Interviews auch unerwartete Schwierigkeiten auftreten.

3.4.1 Aufgabe 1: Gleichung mit gebrochenem Koeffizienten

$$\text{Bestimme x: } \frac{2}{3}x = 4x - 5$$

Die Aufgabe ist nach den Kriterien für Diagnoseaufgaben nicht optimal. Durch das den SchülerInnen aus der Sekundarstufe II bekannte Lösungsverfahren für Gleichungen kann die Aufgabe kaum als offen oder selbstdifferenzierend bezeichnet werden. Differenzierung ist bei Diagnoseinterviews aber grundsätzlich auch durch die Interaktion zwischen Interviewer und dem Schüler bzw. der Schülerin möglich. Die Aufgabe ist auch nicht anwendungsorientiert, sondern rein innermathematisch. Sie ist aber durchaus authentisch, da sie einen typischen Aufgabentyp vertritt. Sie ist insofern als Diagnoseaufgabe geeignet, als sie spezifische Kompetenzen misst. Die beanspruchten inhaltsbezogenen Kompetenzen liegen im Bereich Arithmetik/Algebra, die prozessbezogenen im Bereich

Werkzeuge, da ein bekanntes Verfahren angewendet werden kann. Je nachdem, wie gut dieses Lösungsverfahren beherrscht wird, liegt die Aufgabe im Anforderungsbereich I oder II. Die Aufgabe hat die gleiche Struktur wie die zweite Aufgabe der Eingangsdiagnose. Sie wurde vor allem deswegen ausgewählt, weil zu diesem Aufgabentyp bereits Erkenntnisse durch die Eingangsdiagnose vorliegen. Mögliche Schülerlösungen sind in Tabelle 3.9 dargestellt.

Lösung 1	**Lösung 2**
$\frac{2}{3}x = 4x - 5 \quad \vert -4x$ $\frac{2}{3}x - 4x = -5$ $\frac{2}{3}x - \frac{12}{3}x = -5$ $-\frac{10}{3}x = -5 \quad \vert :(-\frac{10}{3})$ $x = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}x = 4x - 5 \quad \vert \cdot 3$ $2x = 12x - 15 \quad \vert -12x$ $-10x = -15 \quad \vert :(-10)$ $x = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

Tabelle 3.9: Erwartete Schülerlösungen zur ersten Aufgabe

Erwartete Fehler sind

- Verschiebung eines Summanden auf die andere Seite der Gleichung: Addition auf der einen, Subtraktion oder Division auf der anderen Seite,
- Fehlinterpreation des Nebeneinanderschreibens von Koeffizient und Variable als Addition,
- Verwechseln von Brüchen und Dezimalzahlen,
- Verechnung von ganzen Zahlen mit dem Zähler eines Bruchs (d. h. keine Umwandlung der ganzen Zahl in einen Bruch mit anschließender Erweiterung),
- Verwechseln von Multiplikation und Erweitern,
- Vorzeichenfehler, weil bei der Subtraktion grundsätzlich die kleine von der größeren Zahl abgezogen wird,
- Schwierigkeiten durch Division durch einen Bruch,
- Abbruch der Rechnung bei der Form $A \cdot x = B$,
- Operation nur auf einer Seite der Gleichung,
- Operation nur auf einen Summanden einer Summe.

3.4.2 Aufgabe 2: Gleichung mit Parameter

Löse nach x auf: $4(x - b) = 2(x + 3b)$

Wie die erste Aufgabe auch, wurde diese Aufgabe hauptsächlich ausgewählt, weil sie analog zu einer Aufgabe der Eingangsdiagnose ist, in diesem Fall zur fünften. Die nötigen inhaltsbezogenen Kompetenz liegen wie bei der ersten Aufgabe im Bereich Arithmetik/Algebra, die prozessbezogenen Kompetenzen im Bereich Werkzeuge, da ein bekanntes Verfahren angewendet werden kann. Der Anforderungsbereich nach den Bundesbildungsstandards ist auch bei dieser Aufgabe I bis II. Tabelle 3.10 enthält zwei erwartete Schülerlösungen, die allerdings auf Grund der Geschlossenheit der Aufgabe sehr ähnlich sind.

Lösung 1	Lösung 2
$\begin{array}{lll} 4(x-b) & =2(x+3b) & \\ 4x-4b & =2x+6b & \mid -2x+4b \\ 2x & =10b & \mid :2 \\ x & =5b & \end{array}$	$\begin{array}{lll} 4(x-b) & =2(x+3b) & \mid :2 \\ 2(x-b) & =x+3b & \\ 2x-2b & =x+3b & \mid -x+2b \\ x & =5b & \end{array}$

Tabelle 3.10: Erwartete Schülerlösungen zur zweiten Aufgabe

Erwartete Fehler sind

- Operation auf die Gleichung wirkt innerhalb der Klammern, ohne dass der Koeffizient berücksichtigt wird, z. B. Eliminierung des x durch Subtraktion auf beiden Seiten: $4(0 - b) = 2(0 + 3b)$,
- Multiplikation beim Ausmultiplizieren nur mit erstem Summanden,
- willkürliche Vereinfachung: $b = 0$ oder $b = 1$,
- Es wird versucht, b zu bestimmen. Gleichung wird nach b aufgelöst.
- Verschiebung eines Summanden auf die andere Seite der Gleichung: Addition auf der einen, Subtraktion oder Division auf der anderen Seite,
- Fehlinterpreation des Nebeneinanderschreibens von Koeffizient und Variable als Addition,
- Abbruch der Rechnung bei der Form $A \cdot x = B$,
- Operation nur auf einer Seite der Gleichung,
- Operation nur auf einen Summanden einer Summe.

3.4.3 Aufgabe 3: Termumformung

Multipliziere aus: $(x - 5)^2$

Die dritte Aufgabe ist ähnlich wie die Aufgabe 6 der Eingangsdiagnose und die letzte Aufgabe, die analog zu einer Eingangsdiagnoseaufgabe ist. Sie ist nicht komplett geschlossen, weil sie durch Anwendung einer binomischen Formel oder durch paarweises Multiplizieren der Summanden gelöst werden kann. Eine wirklich offene Aufgabe ist sie dadurch aber nicht. Für die inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen gilt das Gleiche wie bei den ersten beiden Aufgaben. Der Anforderungsbereich ist I, da nur Unterrichtsinhalte reproduziert werden müssen. Erwartete Schülerlösungen sind in Tabelle 3.11 dargestellt.

Lösung 1	**Lösung 2**	**Lösung 3**
$(x-5)^2$ $= (x-5) \cdot (x-5)$ $= x^2 - 5 \cdot x - x \cdot 5 + 5^2$ $= x^2 - 10x + 25$	$(x-5)^2$ $= (x-5) \cdot (x-5)$ $= (x-5) \cdot x + (x-5) \cdot (-5)$ $= x^2 - 5 \cdot x - x \cdot 5 + 5^2$ $= x^2 - 10x + 25$	Zweite binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ Hier sind $a = x$ und $b = 5$. Also: $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

Tabelle 3.11: Erwartete Schülerlösungen zur dritten Aufgabe

Erwartete Fehler sind

- ein falsches Schema für die binomische Formel: $x^2 + 10x - 25$ oder $x^2 + 10x + 25$,
- unzulässige Linearisierung: $x^2 - 25$ oder $x^2 + 25$,
- Verwechseln von Multiplikation und Addition: $\pm 25x^2$.

3.4.4 Aufgabe 4: Lineare Gleichung aufstellen

> Auf der Erde leben derzeit ungefähr 7,1 Milliarden Menschen. Jedes Jahr werden es ca. 83 Millionen mehr. Stelle eine Gleichung auf, mit der sich bestimmen lässt, in wie vielen Jahren die Weltbevölkerung unter diesen Bedingungen den Wert 10 Milliarden erreicht.

Bei dieser Aufgabe sollte ein realer Anwendungsbezug hergestellt werden. Die zitierten Zahlen entsprechend der Realität im Jahr 2012. Die Weltbevölkerung wächst tatsächlich nicht exponentiell, da der Reproduktionsfaktor in so einem Maße sinkt, dass die Anzahl der Menschen näherungsweise linear ansteigt. Allerdings dient das Wachstum der Weltbevölkerung in einigen Schulbüchern fälschlicherweise als Beispiel für einen exponentiellen Prozess (vgl. z. B. Griesel et al. 2008b, 86), wodurch trotz der eindeutigen Formulierung in der Aufgabenstellung Assoziationen zum exponentiellen Wachstum möglich sind. Die Aufgabenstellung ist relativ offen, wobei zwar das Ziel – eine Gleichung – vorgegeben ist, aber grundlegend verschiedene Lösungswege denkbar sind. Eine Differenzierung ist im Interview gut möglich, da die Aufgabe auch an die Situation angepasst werden kann, indem zum Beispiel die Aufgabe vereinfacht wird und nur nach einem Algorithmus gefragt wird.

Nötige Inhaltsbezogene Kompetenzen liegen im Bereich Funktionen und Arithmetik/Algebra, prozessbezogene Kompetenzen hauptsächlich im Bereich Modellieren. Für SchülerInnen, die nicht darin geübt sind, Gleichungen selbst aufzustellen, liegt die Aufgabe im Anforderungsbereich II bis III. Tabelle 3.12 enthält verschiedene Lösungswege.

Lösung 1	**Lösung 2**	**Lösung 3**
7,1 Mrd. = 7100 Mio. Weltbevölkerung in Millionen im Jahre x nach heute: y = 7100 + 83x Gesucht ist das Jahr mit y=10000, also 7100 + 83x = 10000	Ausgangswert: 7,1 Mrd. nach 1 Jahr: 7,183 Mrd. nach 2 Jahren: 7,266 Mrd. nach … Jahren: 7,1 Mrd. + 0,083 Mrd. mal Anzahl der Jahre Ziel nach x Jahren: 10 Mrd.	Zeichne Graphen: 1. Achse: Jahr, 2. Achse: Weltbevölkerung Weltbevölkerung für die ersten Jahre eintragen, Steigung des linearen Graphen bestimmen und einsetzen in allgemeine Form f(x) = a · x

Tabelle 3.12: Erwartete Schülerlösungen zur vierten Aufgabe

Erwartete Fehler und Schwierigkeiten sind

- x wird als absolutes Jahr (n. Chr.) interpretiert,
- Betrachtung als exponentieller Wachstumsprozess durch Assoziationen mit Unterrichtsinhalten,
- Größenordnungen Millionen und Milliarden werden nicht oder falsch berücksichtigt.

3.4.5 Aufgabe 5: Schnittpunkt von zwei linearen Funktionen

> Die Kosten bei einem Handytarif setzen sich aus der monatlichen Grundgebühr und den Kosten pro telefonierter Minute zusammen. Ein Anbieter biete folgende Tarife an:

	Tarif 1	**Tarif 2**
Grundgebühr	1 Euro	5 Euro
Minutenpreis	10 Cent	5 Cent

> Für welche monatliche Gesprächsdauer ist Tarif 1 und für welche ist Tarif 2 der günstigere Tarif?

Durch die realistischen Werte und die realistische Problemstellung ist die Aufgabe authentisch. Es sind verschiedene Herangehensweisen denkbar, beispielsweise grafisch, mit einer Wertetabelle oder durch das Aufstellen und Lösen eines Gleichungssystems. Drei mögliche Schülerlösungen mit verschiedenen Ansätzen sind in Tabelle 3.13 dargestellt. Die Aufgabe ist dadurch auch selbstdifferenzierend. Andererseits geht die Offenheit zu Lasten einer scharfen Abgrenzung der angesprochenen Kompetenzen. Die nötigen inhaltsbezogenen Kompetenzen gehören vor allem zum Bereich Funktionen, je nach Lösungsmethode kann auch der Bereich Arithmetik/Algebra von Bedeutung sein. Nötige prozessbezogene Kompetenzen liegen in den Bereichen Modellieren und je nach Methode auch im Bereich Werkzeuge. Wenn die KollegiatInnen ähnliche Aufgaben nicht aus dem Unterricht kennen, liegt die Aufgabe auch im Kompetenzbereich Problemlösen. Die Aufgabe zählt zum Anforderungsbereich III.

<table>
<tr><th>Lösung 1</th><th>Lösung 2</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Preis für Tarif 1: $y_1 = 1 + 0{,}10x$
Preis für Tarif 2: $y_2 = 5 + 0{,}05x$

Wenn man wenig telefoniert, rechnet sich die niedrigere Grundgebühr, also Tarif 1, wenn man viel telefoniert rechnet sich der niedrigere Minutenpreis, also Tarif 2. Der Tarif ist egal, wenn y1 = y2, also

$\begin{array}{lll} 1+0{,}10x & =5+0{,}05x & \mid -0{,}05x-1 \\ 0{,}05x & =4 & \mid :0{,}05 \\ x & =80 & \end{array}$

Der zweite Tarif lohnt sich daher, wenn man mehr als 80 Minuten pro Monat telefoniert.</td>
<td>Systematisches Ausprobieren verschiedener monatlicher Gesprächsdauern:

<table><tr><th>Minuten</th><th>Tarif 1</th><th>Tarif 2</th></tr><tr><td>10</td><td>2</td><td>5,50</td></tr><tr><td>30</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>100</td><td>11</td><td>10</td></tr><tr><td>60</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>90</td><td>10</td><td>9,50</td></tr><tr><td>80</td><td>9</td><td>9</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Lösung 3</td></tr>
<tr><td>Zeichne Graphen mit der Telefonierzeit auf der ersten Achse und den Kosten der Tarife auf der zweiten Achse. Lies den Schnittpunkt ab.</td></tr>
</table>

Tabelle 3.13: Erwartete Schülerlösungen zur fünften Aufgabe

Erwartete Fehler und Schwierigkeiten sind

- keine Umrechnung von Cent- und Eurobeträgen,
- unsystematisches Probieren,
- Kostengleichheit wird nicht mit dem Schnittpunkt der Kostenfunktionen in Zusammenhang gebracht,
- Verschiebung eines Summanden auf die andere Seite der Gleichung: Addition auf der einen, Subtraktion oder Division auf der anderen Seite,
- Operation nur auf einer Seite der Gleichung,
- Operation nur auf einen Summanden einer Summe.

3.4.6 Aufgabe 6: Umkehrung

> Gib zwei beliebige Funktionen an, deren Graphen sich in dem Punkt (2|3) schneiden.

Diese Aufgabe kehrt die typische Problemstellung, den Schnittpunkt von zwei Funktionsgraphen zu bestimmen, um. Die Umkehrung von der Lösung zum Problem ist eine Möglichkeit, Aufgaben zu öffnen. Diese Aufgabe ist offen, da sie sowohl verschiedene Lösungswege als auch Lösungen zulässt. Dadurch ist sie auch gleichzeitig selbstdifferenzierend. Sie ist nicht direkt anwendungsbezogen, hat dadurch aber auch keinen unrealistischen, aufgesetzten Anwendungsbezug. Sie fällt in den inhaltsbezogenen Kompetenzbereich Funktionen und in die prozessbezogenen Kompetenzbereich Problemlösen und Werkzeuge. Der Anforderungsbereich ist je nach Erfahrung II bis III. Zwei mögliche Schülerlösungen sind in Tabelle 3.14 dargestellt.

Lösung 1	**Lösung 2**
Finde zwei Funktionen mit f(2) = 3, z. B. $f_1(x) = 3$ $f_2(x) = 1{,}5x$ $f_3(x) = x + 1$	Zeichne Koordinatensystem und trage den Punkt (3|2) ein. Zeichne Geraden durch den Punkt und miss Steigung m und y-Achsenabschnitt b und stelle Funktionen nach dem Schema $f(x) = m \cdot x + b$ auf.

Tabelle 3.14: Erwartete Schülerlösungen zur sechsten Aufgabe

Erwartete Schwierigkeiten sind

- Vertauschen von x- und y-Koordinate,
- Es wird versucht, bestimmte Funktionen zu berechnen, d. h. es wird nicht erkannt, dass es unendlich viele Lösungen gibt.
- Es werden Funktionsgraphen gezeichnet, aber keine Funktionsgleichungen gefunden.

3.5 Analyse der Interviews

Im Folgenden werden die am Oberstufen-Kolleg durchgeführten Interviews analysiert. Dabei wird meist chronologisch vorgegangen. Zur Unterstützung der Argumentation wird teilweise aber auch vorgegriffen. Am Ende jeder Analyse steht eine Zusammenfassung und ein Vorschlag zur Förderung. Da der Schwerpunkt der Studien auf den Diagnosen liegt und nicht auf den Förderkonzepten, werden die Konzepte nur grob umrissen. Die ausgewählten Förderaufgaben befinden sich ohne nähere Diskussion im Anhang.

Die Namen sind erfundene Pseudonyme, da den teilnehmenden SchülerInnen Anonymität versprochen wurde, um eine möglichst entspannte Situation zu ermöglichen, die frei von Prüfungsangst ist. Nur das Geschlecht der Namen wurde beibehalten. Die Interviews sind in der Reihenfolge abgedruckt, wie sie durchgeführt wurden. So ist auch erkennbar, wie Erfahrungen aus frühen Interviews in die Fragestellungen und Interventionen bei den späteren Interviews einfließen.

3.5.1 Adrian

Adrian ist Kollegiat im ersten Oberstufenjahrgang und besucht keinen Brückenkurs im Fach Mathematik. Nach eigener Angabe wundert er sich aber darüber, warum er keinem Brückenkurs zugeteilt wurde. Das vollständige Transkript und die Mitschrift der Lösungen zu den Diagnoseaufgaben finden sich im Anhang ab Seite 76.

Adrian scheint in der Mathematik vor allem einen Selbstzweck für die Schule zu sehen. Benutzte mathematisch Regeln wie mögliche Umformungsschritte scheinen für ihn willkürlich zu sein und er würde auch andere Regeln akzeptieren. Einen Zusammenhang zwischen Realität und Mathematik sieht er nicht. Er versucht, bei der Lösung der Aufgaben Unterrichtsverfahren zu reproduzieren, die er aber mit keiner Vorstellung verbindet.

Bei der Bevölkerungsaufgabe wird zwischen zwei möglichen Gleichungen diejenige gewählt, die einfacher zu berechnen ist. Zwar ist er sich bewusst, dass es einen Zusammenhang zwischen Mathematik und Realität gibt, hat aber anscheinend aufgegeben, Mathematik nachzuvollziehen und die Strategie gewählt, mathematische Sachverhalte hinzunehmen. Diese Einschätzung wird unterstützt von seiner Unsicherheit in Bezug auf die eigenen Lösungen.

Bei diesem ersten durchgeführten Interview war die mögliche Einflussnahme durch den Interviewer und das richtige Maß für diese Einflussnahme noch nicht ganz klar und es musste erst ein Gespür für die Zielgruppe gefunden werden. Es stellte sich dabei auch heraus, dass die Leitfadenorientierung weit schwieriger ist, als zuvor angenommen, sodass schon zu Anfang vom Leitfaden abgewichen wurde. So wird bei der ersten Aufgabe, als der Kollegiat eine Rechnung durchführen möchte, aber sich nicht dazu in der Lage sieht, nach einigem Warten vorgeschlagen, eine beliebige Zahl als Ergebnis zu nehmen und damit weiter zu rechnen (Z. 17). Hier hätte mehr Geduld gezeigt werden müssen, was aber deswegen nicht getan wurde, weil auch eine erfolgreiche Rechnung nicht mehr zum korrekten Ergebnis hätte führen können, da bereits der Umformungsschritt unzulässig war, weil unterschiedliche Operationen auf den beiden Seiten der Gleichung durchgeführt wurden (Z. 5ff.). Der Eingriff hätte dennoch nicht erfolgen müssen, denn auch die Rechnung, die begonnen wurde, hätte analysiert werden können. In den folgenden Interviews wurden solche Situationen auch anders gehandhabt, aber diese Situation zeigt, dass die Durchführung von Diagnoseinterviews nicht nur gut geplant, sondern auch geübt werden muss und kann, um sinnvolle Diagnosen zu ermöglichen.

Als Ergebnis, das Adrian für die weitere Rechnung wählen durfte, wählte er eine ganze Zahl, sodass die folgende Rechnung deutlich vereinfacht wurde (Z. 19). Hier hätte, wenn überhaupt, ein Bruch vorgegeben werden müssen. Der Vorschlag eine Zahl selbst zu wählen war aber auch im Speziellen für diesen Kollegiaten nicht gut, da er geeignet ist, den Eindruck von einer Beliebigkeit des Mathematiktreibens zu festigen. Dieser Eindruck von der Willkür mathematischer Regeln zeigte sich jedoch erst in der Analyse des Interviews.

Ein weiterer unerwünschter Einfluss durch den Interviewer besteht in einer Frage, die sich auf einen weiter oben durchgeführten, unzulässigen Lösungsschritt bezieht (Z. 26). Die Frage wird aber sofort zutreffend als Hinweis auf einen Fehler aufgefasst und deshalb wird nicht erklärt, wie es zu dem Fehler kam, sondern wie die Rechnung hätte korrekterweise durchgeführt werden müssen (Z. 29). Im Folgenden wurden ähnliche Umformungsschritte auch korrekt gelöst, was möglicherweise ohne den Interviewer-Einfluss nicht der Fall gewesen wäre. Um den Schaden zu begrenzen, wurden später auch Nachfragen bei Schritten gemacht, bei denen keine Fehler aufgetreten sind (z. B. Z. 53). Ebenfalls Anlass zur Selbstkritik gibt die Frage, ob von zwei möglichen Gleichungen für die Bevölkerungsentwicklung in Aufgabe 4 diejenige ausgewählt wurde, mit der einfacher zu rechnen ist (Z. 87). Die Frage ist etwas suggestiv, allerdings wurde hier nur eine Äußerung von Adrian wiedergegeben (Z. 84). Bei den nachfolgenden Interviews wurde stärker darauf geachtet, keine suggestiven Fragen zu stellen. Dies schlägt sich auch in der kleineren Zahl der Wortwechsel bei den anderen Interviews nieder, vgl. dazu die Nummer der jeweils letzten Zeile der Interviewmitschriften, die in Adrians Interview den größten Wert hat.

Der Einfluss durch den Interviewer wird auch an einer anderen Stelle deutlich, hier allerdings absichtlich, um zu testen, wie selbstsicher der Kollegiat bei seinen eigenen Überlegungen ist: Die Frage, ob die aufgestellte Gleichung auch „ganz anders aussehen" (Z. 99) könnte, wird sofort bejaht mit dem Hinweis, dass „die richtige Formel […] auf jeden Fall ganz anders" (Z. 100) ist.

Bei der ersten Aufgabe benutzt Adrian die Formulierung, dass er das „x auf die andere Seite" (Z. 4) bekommen möchte. Die Formulierung benutzt er auch später für ähnliche Operationen (Z. 25 und 44). Sie deutet auf ein kalkülhaftes Verständnis des Lösens von Gleichungen hin, ist für sich betrachtet aber noch nicht bedenklich, weil die Formulierung zwar schädlich, aber üblich ist. Für ein unverstandenes Anwenden von Regeln spricht aber der erste angewendete Umformungsschritt: Als Operation, um 4x rechts zu eliminieren, wird durch 4x geteilt (Z. 5). Auf der linken Seite wird auch tatsächlich eine Division vorgenommen, rechts wird 4x subtrahiert oder vermutlich einfach weggelassen (Z. 7). Die Division des Bruchs durch eine ganze Zahl gelingt nicht, wobei darauf verwiesen wird, dass im Unterricht nur mit Dezimalbrüchen gearbeitet wird (Z. 12). Die Kompetenz im Bruchrechnen als Basiskompetenz aus dem sechsten Schuljahr kann aber dennoch erwartet werden. Bei der Division wird der Quotient x : x gar nicht beachtet, stattdessen wird wieder ein x hinter den Quotienten der Koeffizienten geschrieben (Z. 19). Für konkrete Zahlen gelten für Adrian möglicherweise andere Regeln als für Variablen.

Auf die Nachfrage, warum durch 4x geteilt wurde, korrigiert sich Adrian und sagt, er hätte addieren müssen, da hinter 4x ein Minuszeichen steht (Z. 29). Der Operator danach wird also auf den Term bezogen. Er korrigiert sich aber ein weiteres Mal und sagt nun, dass er 4x hätte subtrahieren müssen, um es auf der rechten Seite der Gleichung zu eliminieren (Z. 29).

Die zweite Aufgabe wird korrekt gelöst. Wie oben angemerkt, wäre die Aufgabe aber möglicherweise ohne den Interviewereinfluss anderes gelöst worden. Auffällig ist nur, dass das Multiplizieren einer Zahl mit einer eingeklammerten Summe mit der Bemerkung „Binomische Formel ist immer blöd" (Z. 37) kommentiert wird, obwohl eine binomische Formel hier nicht zur Anwendung kommt.

Der Term in der dritten Aufgabe wird unzulässig linearisiert (Z. 58). Auf Nachfrage wird das Vorgehen nicht inhaltlich begründet, sondern anhand der Notation: „weil die hoch zwei steht ja außerhalb der Klammer und nicht über einer bestimmten Zahl." (Z. 60). Zur weiteren Nachforschung wäre es sinnvoll gewesen, einen Widerspruch herbeizuführen, indem für x eine konkrete Zahl eingesetzt wird und zum Beispiel $(1 + 5)^2$ explizit auf zwei Wegen berechnet wird, also $1^2 + 25^2$ mit 6^2 verglichen wird. Es zeigt sich, dass es sinnvoll ist, bei der Planung der Interviews auch zu überlegen, wie mit den erwarteten Fehlern umgegangen wird.

Für die Bevölkerungsentwicklung schreibt Adrian zunächst eine korrekte – bis auf die um eine Dezimalstelle falsche Umrechnung von Millionen in Milliarden – Gleichung hin (Z. 71ff.). Er überlegt aber nicht, welche Gleichung inhaltlich sinnvoll ist, sondern versucht sich an eine entsprechende Gleichung aus dem Unterricht zu erinnern. Das Wort „Wachstum" ist für ihn ein Stichwort, das er mit dem Unterricht in Verbindung bringt. Er versucht, eine Gleichung zu reproduzieren, die exponentielles Wachstum beschreibt (Z. 81), wendet das Schema jedoch nicht korrekt an. Er beschreibt auch, dass die Bevölkerung exponentiell wachsen muss, weil sich das bisherige Wachstum auf das zukünftige Wachstum auswirke (Z. 92ff.), kann dies jedoch nicht mit der Gleichung in Verbindung bringen. Er sagt, dass er mit aktuellen Unterrichtsinhalten zurechtkomme, mit weiter zurückliegenden jedoch nicht (Z. 96). Das spricht dafür, dass der Kollegiat Unterrichtsinhalte nur übt, aber nicht nachvollzieht. Zwischen der linearen und der exponentiellen Gleichung entscheidet er sich für die lineare Gleichung, weil diese einfacher zu lösen sei (Z. 86). Diese willkürliche Auswahl spricht für den Eindruck, dass der Interviewte beliebige Lösungen akzeptieren würde.

Bei der Tarif-Aufgabe wird zunächst die Aufgabenstellung nachvollzogen und für einen realistischen Wert (30 Minuten) werden die Kosten für beide Tarife berechnet, was gelingt. Dabei schreibt er „0,50€" (Z. 131), rechnet aber korrekt mit 0,05 Euro. Möglicherweise liegt das daran, dass er ein realistisches Ergebnis erwartet. Er argumentiert korrekt, dass der Tarif mit höheren Minutenpreis günstiger ist, wenn wenig telefoniert wird, und der andere, wenn viel telefoniert wird (Z. 135ff.) und dass sie sich folglich „in der Mitte treffen" (Z. 139). Er ist also durchaus in der Lage, mathematisch zu argumentieren. Interessant wäre es gewesen zu prüfen, ob er für zwei gegebene lineare Funktionsgleichungen hätte bestimmen können, welche für größere x-Werte größere Funktionswerte angenommen werden, oder ob er die Tarif-Aufgabe nur aufgrund des Anwendungskontextes lösen konnte.

Im Folgenden berechnet der Kollegiat die Kosten für 20 Minuten (Z. 141), obwohl er diesen Wert durch die obige Überlegung und die Berechnung der Kosten für 30 Minuten direkt hätte ausschließen können. Dies bemerkt er auch selbst nachdem er die Rechnung durchgeführt hat (Z. 158). Im Folgenden wird systematischer vorgegangen und es werden Werte ausprobiert, die nicht bereits ausgeschlossen werden können. Dabei wird allerdings schnell zufällig der Wert gefunden, bei dem beide Tarife gleich teuer sind (Z. 162). Auf die Frage, ob sich die Tarife später wieder treffen können, ist er sich sicher, dass das nicht der Fall sein kann, rechnet aber trotzdem. Hier wird einerseits die Beeinflussbarkeit des Interviews durch die Fragen deutlich, andererseits die Unsicherheit des Kollegiaten.

Bei der Umkehraufgabe notiert er die Funktionen x^2 und x, was möglicherweise daran liegt, dass die Konstruktion von Funktionen in der Schule vor allem anhand von quadratischen Funktionen thematisiert wird. Die lineare Funktion versucht er, um den Wert 1 nach oben zu verschieben, sodass sie durch den Punkt (2|3) geht (Z. 192). Er ist jedoch nicht in der Lage, diese Verschiebung formal umzusetzen und schreibt 2x.

Zur Förderung wird vorgeschlagen, das Lösen von Gleichungen von Grund auf einzuführen und mit einfachen Beispielen zu veranschaulichen. Es soll Wert darauf gelegt werden, dass die einzelnen Schritte nachvollzogen werden. Dazu erscheint die Veranschaulichung der Gleichung als Waage im Gleichgewicht sinnvoll. Um die Sinnhaftigkeit zu verdeutlichen, sollen auch Anwendungsaufgaben zusammen gestellt werden. Dazu werden auch Lösungen angegeben, sodass ausgeschlossen wird, dass sich Fehler verfestigen. Ein einführender Text zu Gleichungen und die Förderaufgaben finden sich im Anhang ab Seite 85.

3.5.2 Bianca

Bianca ist Kollegiatin im zweiten Oberstufenjahrgang und möchte Mathematik als Abiturfach wählen. Wie dadurch zu erwarten ist, besucht sich auch keinen Mathematik-Brückenkurs. Das Transkript findet sich im Anhang ab Seite 87.

Die Kollegiatin löst die meisten Aufgaben so gut wie fehlerfrei. Verschiedene im Unterricht behandelte Verfahren wie die schriftliche Multiplikation oder das Lösen von Gleichungen beherrscht sie sicher. Sie ist sich ihrer eigenen mathematischen Kenntnisse dabei allerdings so sicher, dass sie einmal ein unrealistisches Ergebnis uminterpretiert, um ein realistisches zu erhalten, ihre Rechnung zweifelt sie aber nicht an. Das stark automatisierte Vorgehen wird zwar beherrscht, wird aber unüberlegt eingesetzt und dadurch teilweise einfacheren Wegen vorgezogen. Schwierigkeiten hat sie außerdem beim Kopfrechnen.

Die erste Aufgabe löst sie fehlerfrei. Auffällig ist die kalkülorientierte Sprechweise, dass etwas „auf die andere Seite" (Z. 4 und Z. 8) gebracht wird und dass einmal „Rechnen wir mal drei" (Z. 14) gesagt wird, obwohl erweitert wird. Aufgabe 2 wird ebenfalls fehlerlos gelöst und der Lösungsweg gibt keinen Anlass für weitere Nachforschungen. Aufgabe 3 wird mit Hilfe einer Formel gelöst, die auch bezeichnet wird: „Ist 'ne binomische Formel, die zweite" (Z. 41).

In Aufgabe vier wird der Wachstumsprozess als exponentielles Wachstum aufgefasst, obwohl sich dies aus der Aufgabenstellung nicht ergibt. Sie begründet aber, warum die Bevölkerung (wenn ein konstanter Wachstumsfaktor unterstellt wird) exponentiell wächst (Z. 56). Bianca stellt also einen Bezug zum Unterricht her, was auch dadurch deutlich wird, dass sie versucht, eine aus dem Unterricht bekannte Formel für exponentielles Wachstum zu reproduzieren (Z. 48ff.). Dies gelingt ihr aber nicht vollständig. Zuerst vermischt sie die Größenordnungen Milliarden und Millionen (Z. 48ff.). Der Realitätsbezug spielt offenbar keine Rolle, die Zahlen werden unabhängig davon betrachtet. Bei der Reproduktion der Formel für exponentielles Wachstum schreibt sie zunächst $10 = 7{,}1 \cdot x^{83}$ (Z. 49), revidiert aber sofort zu $10 = 7{,}1 \cdot 83^{x}$ (Z. 51). Um zu entscheiden, ob diese Gleichung richtig sein kann, überprüft sie, ob die Rechnung für $x = 2$ plausibel ist, verneint und kehrt daher zur ersten Gleichung zurück (Z. 54). Die Gleichung wird also auswendig hingeschrieben und nicht hergeleitet und unter allen Einfällen wird die plausibelste gewählt. Auf die Aufforderung, ihr Vorgehen zu erklären, will sie es anhand der Aufgabenstellung begründen, wobei ihr auffällt, dass dort von einem linearen Wachstum ausgegangen wird (Z. 56). Sie zeichnet den Graphen einer linearen Funktion. Bei ihrer Erklärung trennt sie auch zwischen Milliarden und Millionen, nennt aber wieder einen Teil des Funktionsterms, in der die Größenordnungen vermischt werden („Deswegen muss das 83 mal x heißen." (Z. 58)).

In der Tarif-Aufgabe 5 hingegen achtet sie auf die (deutlich kleineren) Größenordnungen und rechnet die Cent- in Euro-Beträge um (Z. 61ff.). Sie stellt sofort korrekte Funktionsgleichungen für beide Tarife auf, bezeichnet jedoch x zunächst als „Anzahl der Telefonate" (Z. 60), aber korrigiert sich dann zu „Minutendauer" (Z. 64). Sie setzt die Funktionen gleich und löst die Gleichung zu „0,05x = 4" (Z. 69). Kopfrechnen bereitet ihr nach eigener Aussage Schwierigkeiten: „ich kann das nicht so gut im Kopf rechnen" (Z. 72), „Aber geteilt im Kopf rechnen kann ich nicht" (Z. 90) und „Mathe macht mir auch erst Spaß, seitdem ich einen Taschenrechner habe. Vorher war ich richtig schlecht in Mathe, ich kann kein Kopfrechnen" (Abschluss des Interviews).

Die Division 4 : 0,05 versucht sie, durch Auffüllen zu lösen und addiert 0,05 mehrfach, wobei sie mitzählt. Statt bis zur 4 zu addieren, addiert sie allerdings nur viermal, sodass sie im Endeffekt multipliziert statt dividiert. Ihr Ergebnis ist damit „x = 0,2" (Z. 75). Sie bemerkt das unrealistische Ergebnis, zweifelt jedoch nicht an ihrer eigenen Rechnung, sondern interpretiert das Ergebnis um, um einen realistischen Wert zu erhalten: „So, sagen wir, es sind jetzt Stunden" (Z. 76). Auf spätere Nachfrage bestätigt sie dieses Vorgehen (Z. 96).

Um einen Widerspruch zu erzeugen, wird sie aufgefordert, nachzuweisen, dass dies der Schnittpunkt ist, indem sie für x einen kleineren und einen größeren Wert als 0,2 einsetzt. Die sich anschließende Rechnung „1 + 0,1 · 0,1" (Z. 79) wird wieder nicht im Kopf gerechnet, sondern schriftlich (Z. 81). Hier wird deutlich, wie die geübten, automatisierten Verfahren Vorrang vor eigenen Überlegungen haben. Die schriftliche Multiplikation wird zwar sicher und korrekt durchgeführt, durch zehn hätte Bianca aber sicherlich im Kopf teilen können. Die Erzeugung des Widerspruchs gelingt. Sie bemerkt, dass das Ergebnis x = 0,2 nicht korrekt sein kann und vermutet den Fehler in der Division 4 : 0,05 (Z. 90).

Für die Umkehraufgabe sucht sie eine lineare Funktion, die durch den Punkt (2|3) geht. Zunächst sucht sie offensichtlich nach einer proportionalen Funktion: „Irgendwas mal zwei muss drei ergeben" (Z. 100). Sie verwechselt aber anscheinend „irgendwas" (den Proportionalitätsfaktor) mit x und schreibt „f(x) = 2x" (Z. 101). Sie bemerkt, dass f(2) = 4 ist und modifiziert die Funktion zu f(x) = 2x – 1 (Z. 103). Für die zweite Funktion wählt sie einen beliebigen anderen Wert für die Steigung, entscheidet sich für 3 und erhält analog „f(x) = 3x – 3" (Z. 107). Ihr Vorgehen beschreibt sie wieder kalkülorientiert und automatisiert als Anwendung der allgemeinen linearen Funktionsgleichung „f(x) = m·x + b" (Z. 113). Dabei wird auch deutlich, dass sie, wenn es möglich ist, Lösungswege so wählt, dass sie eine Division vermeidet: „Weil es ist schwierig, 'ne Kommazahl zu finden, ich weiß gar nicht, ob's das gibt, wie viel mal zwei ist drei. Sowas kann man schlecht herausfinden, aber man hat ja noch diesen y-Achsenabschnitt, mit dem kann man ein bisschen plus rechnen." (Z. 118).

Bianca hat kaum Schwierigkeiten im Mathematikunterricht. Förderung sollte aber nicht nur den „ProblemschülerInnen" vorbehalten sein, sondern ein Angebot für alle SchülerInnen sein, um ihnen zu ermöglichen, ihr individuelles Leistungsniveau zu steigern. Die Kollegiatin hat Schwierigkeiten bei der Division im Kopf. Das Problem liegt aber nicht im mangelnden Verständnis, sondern lediglich in einer sicheren, effizienten Umsetzung im Kopf. Da das Verständnis bereits vorhanden ist, darf das Kopfrechnen stärker automatisiert, d. h. trainiert werden. Zur Förderung werden daher „Rechentricks" zur Division im Kopf zusammengestellt und geübt. Dabei muss aber auch der Kollegiatin deutlich gemacht werden, dass diese Tricks optionale, dem Verständnis untergeordnete Ergänzungen sind, die nur zur Steigerung der Geschwindigkeit dienen sollen und dazu, den Taschenrechner auch einmal zur Seite legen zu können. Bianca sollte außerdem bewusst werden, dass sie sehr kalkülhaft an Aufgaben herangeht, was für Schulaufgaben zwar häufig zielführend ist, jedoch nicht immer die schnellste und flexibelste Herangehensweise ist. Die Diagnose wird ihr deshalb so mitgeteilt und es werden Problemlöseaufgaben zusammen gestellt, die nicht mit den standardisierten Verfahren aus dem Unterricht gelöst werden können.

3.5.3 Christina

Christina ist Kollegiatin im zweiten Oberstufenjahrgang. Sie hatte für einen kurzen Zeitraum das Studienfach Mathematik belegt, aber dann wieder abgewählt. Sie besucht keinen Brückenkurs. Der Mitschnitt folgt im Anhang ab Seite 96.

Christina versucht bei vielen Aufgaben, auf Lösungsverfahren aus dem Unterricht zurückzugreifen, hat aber Schwierigkeiten, sich an die konkreten Verfahren zu erinnern. Tatsächlich wäre sie aber in der Lage, die Aufgaben mit eigenen Verfahren auf kreative Weise zu lösen, ist aber auf die Unterrichtsverfahren fixiert. Dies macht sich vor allem bei den Anwendungsaufgaben bemerkbar. Der Kollegiatin fehlt also ein gewisses Selbstbewusstsein für ihre eigenen Ideen, denn über die nötigen Kompetenzen verfügt sie. Das kann zusammenhängen mit einem Bild einer vorgefertigten Mathematik, die es anzuwenden gilt und die für jede Situation ein Verfahren bereit hält.

Bei der ersten Aufgabe benutzt sie die Formulierung, dass die Variable x „auf eine Seite" (Z. 2) gebracht werden muss, führt die Rechnung aber korrekt durch. Die nächste Äußerung gibt zum ersten Mal einen Hinweis auf ein Bild einer vorgegeben Mathematik: Sie überlegt, was sie „machen muss" (Z. 8), um die Koeffizienten zusammenfassen zu können. Dann schreibt sie zunächst die 4 als $\frac{4}{1}$ (Z. 9), erweitert mit 3 und versucht in ihren Kommentaren, Unterrichtsvokabular zu benutzen: „Dann müsste ich den Bruch umformen, als den gleichen Nenner auch benennen" (Z. 10). Sie subtrahiert die Zähler und formt die Gleichung um zu $-\frac{10}{3}x=-5$ (Z. 13). Bei Versuch, durch den Bruch zu teilen, stößt sie zunächst auf die Schwierigkeit, einen Bruch im Nenner stehen zu haben (Z. 17), erinnert sich dann aber, dass sie „mit dem Kehrwert mal[nehmen]" (Z. 30) kann, was ihr auch gelingt. Das Kürzen des Ergebnisses gelingt ihr allerdings nicht (Z. 38).

In der zweiten Aufgabe stellt die zusätzliche Variable b für Christina zunächst eine Hürde dar und sie überlegt, was sie „machen soll" (Z. 58), denn eine Gleichung mit zwei Variablen ergebe „eigentlich keinen Sinn" (Z. 46). Sie habe das „ziemlich oft gemacht, aber momentan ist das irgendwie raus. Schon ein bisschen länger her" (Z. 52). Sie sucht also wieder nach einem speziellen, aus dem Unterricht bekannten Lösungsverfahren für Gleichungen mit zwei Variablen. Sie wird aufgefordert, den Begriff „Variable" zu erklären. Während der Erklärung korrigiert sie sich und präzisiert dabei den Begriff von „ein bestimmter Faktor, den man halt frei, den man halt bestimmen kann" (Z. 54) über „also es kann jede Zahl sein, jede mögliche" (ebd.) zu „ein Platzhalter für jede mögliche Zahl" (ebd.). Sie bemerkt auch die Aufforderung nach x aufzulösen und danach löst sie die Aufgabe problemlos bis zur Gleichung $\frac{10\,b}{2}=x$ (Z. 61). Anscheinend hat sich die bewusste Vorstellung, die die Kollegiatin von Variablen hatte, während ihrer Erklärung geändert, sodass die Aufgabe nun doch Sinn ergab. Die Reaktion zeigt aber auch den Einfluss des Interviewers auf die Lösung und muss entsprechend berücksichtigt werden.

Bei der entstandenen Gleichung hat sie Schwierigkeiten beim Kürzen, da sie sich fragt, ob man auch bei Produkten kürzen darf (Z. 67). Sie versucht, eine entsprechende Regel aus dem Unterricht zu erinnern und kommt zu dem Schluss, das aus Produkten gekürzt werden darf.

Die dritte Aufgabe wird durch Ausmultiplizieren gelöst, was auch gelingt. Die Frage, ob sie die binomischen Formeln herleiten könne, verneint Christina mit dem Hinweis, dass sie es „nicht mehr" (Z. 85) könne, weil es schon so lange her sei.

Bei der Bevölkerungsaufgabe unterstreicht sie sich zunächst die Zahlen in der Aufgabenstellung und schreibt sie heraus (Z. 94) – ein Vorgehen, das vermutlich im Unterricht so gezeigt wurde. Sie assoziiert den Wachstumsvorgang mit einer „Exponentialfunktion" (Z. 95) und merkt an, dass sie solche Rechnungen erst „vor Kurzem in Mathe gehabt" (Z. 95) habe. Die entsprechende Gleichung fällt ihr allerdings nicht mehr ein uns sie kann sie auch nicht herleiten. Stattdessen beschreibt sie, wie die Aufgabe ohne eine Gleichung gelöst werden kann und schlägt vor, den Wert 83 Millionen wiederholt auf den Ausgangswert 7,1 Milliarden zu addieren (Z. 103). Sie bringt dieses Vorgehen aber nicht in Zusammenhang mit einer linearen Funktion. Bei der anschließenden ersten Addition werden die 83 Millionen falsch umgerechnet (0,83 Milliarden) (Z. 119). Nach dieser Berechnung wäre es für die Diagnose sinnvoll gewesen, noch einmal zu versuchen, eine Gleichung aufzustellen, was jedoch erst bei der Analyse auffiel.

Bei der Tarif-Aufgabe tritt zunächst ein Verständnisproblem auf: Der Begriff „monatliche Gesprächsdauer" wird so interpretiert, dass einen Monat lang telefoniert wird. Dies fiel auf, als Christina begann, die Minuten eines Monats zu berechnen, sodass eingegriffen wurde, um die Begrifflichkeit zu klären (Z. 132). Christina stellt für beide Tarife eine Kostenfunktion auf, berücksichtigt aber nicht, dass die Grundgebühr in Euro, der Minutenpreis in Cent angegeben ist (Z. 124 und 136). Danach folgt wieder ein Problem, dass vermutlich dadurch zustande kommt, dass sie sich an das formalisierte Vorgehen im Unterricht gebunden fühlt: Sie hat keine Idee, was sie mit den nun aufgestellten Funktionstermen anfangen kann, denn „Da hab ich jetzt halt zwei, zwei Gleichungen. Die könnte ich halt vergleichen, indem ich sie gleichsetze. Aber halt, ich muss ich erstmal, dass beide denselben. Das sind ja nur zwei Terme" (Z. 137) und „Ich hab jetzt zwei Terme, aber es fehlt halt noch, wie soll ich sagen, ein Ergebnis, was rauskommen muss" (Z. 139). Gleichsetzen scheint nur als Lösungsverfahren für Gleichungen oder zum Bestimmen von Schnittpunkten von Funktionen möglich zu sein. Da sie aber nur einen Funktionsterm und keine Funktionsgleichung mit „f(x) = …" aufgestellt hat, fehlt ihr die Form, um das Verfahren anzuwenden. Da die Zeit weit fortgeschritten war, wurde allerdings nicht näher darauf eingegangen, sondern mit der letzten Aufgabe fortgesetzt (Z. 144). Rückblickend wäre es sinnvoll gewesen, die letzte Aufgabe wegzulassen und stattdessen die Aufgabe 5 weiter zu bearbeiten.

Bei der Umkehraufgabe werden wieder Vorgehensweisen aus dem Unterricht benutzt. Zunächst benennt die Kollegiatin den Punkt (2|3) mit dem Buchstaben P, schreibt „P(2|3)" (Z. 150) und zeichnet ein Koordinatensystem, in das sie diesen Punkt einträgt. Danach zeichnet sie eine Ursprungsgerade durch den Punkt, also den Graphen von 1,5x und bezeichnet die Funktion als „f(x) = x" (Z. 156). Diese Funktion scheint ein Schema für eine proportionale Funktion zu sein, das nicht weiter überprüft oder angepasst wird.

Ihre ursprüngliche Idee, eine zweite lineare Funktion zu wählen, die orthogonal zur ersten durch den Punkt verläuft (Z. 154), verwirft sie wieder und zeichnet stattdessen eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt (2|3) (Z. 158). Der Hintergrund ist vermutlich, dass die Konstruktion von Funktionen in der Schule häufig an verschobenen und gestreckten Normalparabeln („Scheitelpunktsform") thematisiert wird. Christina versucht, für den Graphen eine Funktionsgleichung aufzustellen, wobei sie vermutlich auf die Scheitelpunktsform zurückgreifen will. Dies gelingt ihr jedoch nicht (Z. 162).

Um zu überprüfen, ob die von ihr aufgestellten Funktionen die Anforderung erfüllen, versucht sie den Schnittpunkt der Funktionen durch Gleichsetzen zu bestimmen und nicht, den vorgegebenen Punkt einzusetzen. Auf die Frage, ob sie schon einmal selbst Funktionen konstruiert hat, antwortet sie, dass das „verdammt lange her" (Z. 173) sei. Sie merkt nach dem Interview an, dass sie Mathematik eigentlich „ziemlich gut drauf" habe. Sie scheint mit ihrem eng am Unterricht orientierten Mathematikkonzept erfolgreich zu sein, hat aber durch diese Oberflächlichkeit Schwierigkeiten mit Aufgaben, die nicht den aktuellen oder kürzlich im Unterricht behandelten Inhalten entsprechen.

Zur Förderung werden Christina die gewonnenen Erkenntnisse mitgeteilt, damit sie sich dessen bewusst wird und sich in Zukunft ein anderes Bild von der Mathematik machen kann. Außerdem werden einige Problemlöseaufgaben zusammen gestellt, die sich nicht mit reinen Unterrichtsverfahren lösen lassen.

3.5.4 Dennis

Dennis besucht den ersten Oberstufenjahrgang und wird diesen wiederholen. Er besucht den Brückenkurs 1. Das vollständige Transkript und die Mitschrift sind im Anhang ab Seite 107 abgedruckt.

Die drei kalkülorientierten Aufgaben bereiten ihm große Schwierigkeiten. Auf den ersten Blick scheint es, als verwechsele er die Grundrechenarten miteinander. Eine genauere Betrachtung zeigt aber, dass die Probleme vor allem in der Kenntnis der formalen Notation liegen. Bei der Tarif-Aufgabe zeigt sich durchaus ein mathematisches Grundverständnis. Die Aufgabe löst er aber unter Vermeidung der Formelsprache. Bei der Umkehraufgabe kann er seine Lösungsidee nicht umsetzen, da ihm wieder die formale Schreibweise Probleme bereitet und für ihn der Begriff einer Funktion nicht klar ist.

Er beginnt die erste Aufgabe mit der Addition des Wertes 5 (Z. 5). Er benutzt dabei den (wohl aus dem Unterricht übernommenen) Ausdruck, die „fünf auf die andere Seite" (Z. 4) zu bekommen. Die Sprechweise macht nicht deutlich, dass auf beiden Seiten der Rechnung die gleiche Operation vorgenommen werden muss. Und so fragt er sich, ob die fünf nun auf der linken Seite addiert werden muss oder „ganz weg" (Z. 6) geht. Das deutet darauf hin, dass die Operation bei ihm unverstanden ist, sondern rein kalkülhaft angewendet wird. Dies bestätigt sich im nächsten Schritt, in dem er auf den beiden Seiten der Gleichung unterschiedliche Operationen durchführt. Er schreibt „+4" (Z. 9) und addiert links vier (Z. 11). Rechts wird scheinbar durch vier geteilt. Bei Vergleich mit anderen Operationen, wird aber deutlich dass er den Koeffizienten „4" einfach weg lässt: Er fragt sich im Schritt vorher, ob die fünf „ganz weg" geht und bemerkt später bei Aufgabe 2, als er die Gleichung „4x = 2x + 9b" (Z. 44) bearbeitet und „4x" (Z. 46) addieren will, dass dann links „gar nichts mehr" (Z. 47) stehen bleibe. Es ist ein Schema zum Lösen von Gleichungen erkennbar, bei dem der Wert, den es „wegzubekommen" (Z. 49) gilt, auf einer Seite addiert und auf der anderen Seite weggelassen wird. In dieser Sichtweise werden beim Lösen von Gleichungen keine Rechnungen durchgeführt, sondern Symbole verschoben. Die scheinbar korrekt gelöste erste Umformung (Z. 5) funktionierte dann deshalb zufällig, weil auf der rechten Seite ein Minuszeichen vor der 5 stand. Im Widerspruch dazu steht allerdings, dass bei Aufgabe 2 der Wert „2x" korrekt auf beiden Seiten subtrahiert wird. Möglicherweise liegt dies am „x", da für Dennis für Terme mit und ohne Variablen völlig unterschiedliche Regeln zu gelten scheinen (Z. 61). Dies spricht ebenfalls für ein rein kalkülhaftes Bild von der Mathematik ohne Realitätsbezug, für das beliebige Regeln akzeptiert und auswendig gelernt werden müssen. Eine andere Möglichkeit, warum an dieser Stelle „2x" subtrahiert wird, liegt im Einfluss durch den Interviewer: Nachdem oben 4 addiert wurde und rechts scheinbar durch 4 dividiert (eigentlich weggelassen), wurde nachgefragt, warum die Addition gewählt wurde und keine andere Operation (Z. 25), woraufhin erwidert wurde, dass er tatsächlich hätte subtrahieren müssen (Z. 26).

Für Dennis steht das Nebeneinanderschreiben eines Koeffizienten und einer Variablen für eine implizite Addition. 4x ist also gleichbedeutend mit 4 + x. Darauf deutet eine Äußerung des Kollegiaten hin: „Eigentlich hätte ich minus vier, weil es ja plus vier ist" (Z. 26). Ebenfalls dafür spricht die Anwendung des Distributivgesetzes auf „2(x + 3b)" (Z. 31) mit dem Ergebnis „2x + 5b" (Z. 35). Interessant ist dabei, dass Dennis trotz der implizit angenommenen Addition die Sprechweise „mal" (Z. 37) benutzt, weshalb an dieser Stelle zunächst von einem Verwechseln von Addition und Multiplikation bei der Durchführung der Rechnung ausgegangen wurde.

Die Lösung von Aufgabe drei ist ebenfalls mit dieser Fehlvorstellung zu erklären: Der Term $(x – 5)^2$ wird umgeformt zu $4x^2$. Wiederholtes Nachfragen deutet auf folgendes Vorgehen hin: Zunächst wird x – 5 betrachtet. Da kein Koeffizient vor dem x steht, ist dies gleichbedeutend mit 1x – 5. Da das Nebeneinanderschreiben für eine implizite Addition steht, gilt 1x – 5 = 1 + x – 5. Die Werte 1 und –5 werden verrechnet, wobei die kleinere von der größeren Zahl abgezogen wird – eine Strategie, die in Anwendungsaufgaben zumindest in den unteren Jahrgängen häufig zum Ziel führt. Somit folgt x – 5 = 4 + x = 4x. Dieser Term wird quadriert zu $4x^2$, wobei unklar bleibt, ob Exponenten für Dennis grundsätzlich nur auf x-Terme wirken oder ob bei dieser Schreibweise auch die vier quadriert werden muss (Z. 86f.).

Im Interview fiel dieses Verständnis des Nebeneinanderschreibens allerdings nicht auf, sondern erst in der Analyse, weshalb keine genauere Untersuchung stattfinden konnte. Zunächst wurde Willkür vermutet, die durch den Wunsch entsteht, schnell mit der Aufgabe abzuschließen. Darauf deuten auch Äußerungen des Kollegiaten wie „Und dann wollte ich einfach, dass eine Seite freier ist." (Z. 22) hin. Genauere Nachfragen zum Vorgehen tragen nicht immer zum Verständnis bei, da Dennis die Introspektion offenbar schwer fällt (z. B. Z. 74ff.).

Bei der Aufgabe 4 zum Bevölkerungswachstum wird sofort ein korrekter Funktionsterm für den Bevölkerungsstand im Jahre x nach heute aufgestellt. Lediglich der Wert 83 Millionen wird um eine Dezimalstelle falsch als 0,83 Milliarden dargestellt: 7,1 + 0,83x. Es wird allerdings keine Gleichung aufgestellt, d. h. der Funktionsterm wird nicht mit dem gesucht Wert 10 gleichgesetzt, auch nicht auf die Nachfrage, wie man mit dem Term das Problem lösen könne (Z. 98f.). Dagegen wird bereits der Funktionsterm als „Gleichung" (Z. 99) bezeichnet. Das korrekte Aufstellen des Funktionsterms wird dadurch begünstigt, dass Dennis im Gegensatz zu den meisten anderen KollegiatInnen offenbar den Wachstumsprozess nicht sofort mit exponentiellem Wachstum verknüpft. Das oben beschriebene Verständnis vom Nebeneinanderschreiben von Zahlen und Variablen als implizite Addition wirft allerdings die Frage auf, ob hier tatsächlich ein korrekter Term aufgestellt wurde, oder ob aus den Werten in der Aufgabenstellung ein plausibler Term „gebastelt" wurde. Die Erklärung des Interviewten „Also sind das die Menschen plus die Millionen, die dazu kommen und dann mal das wie oft das dazu gerechnet werden muss, damit das zehn Milliarden ergibt" (Z. 93) spricht aber dafür, dass ein sinnvoller Term aufgestellt wurde und die Aufgabe und das Vorgehen verstanden wurden. Dennis unterliegt hier auch nicht den für ihn schwierigen Problemen eines auswendig gelernten Kalküls, da ihm kein Kalkül bekannt ist: „Also sowas hab ich noch nie gemacht, also selber eine Gleichung aufstellen" (Z. 95). Er verfügt also durchaus über die Kompetenz, logisch und gezielt vorzugehen und quantitative Größen miteinander in Bezug zu setzen. Aufgaben mit Sachbezug kann er deswegen lösen, vermeidet aber die Benutzung der standardisierten Vorgehen.

Dies trifft auch bei der Tarif-Aufgabe zu, die er löst, ohne je einen Funktionsterm aufzustellen. Der Schüler erklärt sofort, welcher Tarif günstiger ist, wenn wenig telefoniert wird (Z. 109), und warum der andere bei langen Gesprächszeiten günstiger ist (Z. 113).

Der realitätsnahe Anwendungsbezug ermöglicht ihm die Bearbeitung und es ist wegen der Beobachtungen bei den ersten drei Aufgaben davon auszugehen, dass er die analoge Aufgabe „Bestimme die Lösung von 1 + 0,1x = 5 + 0,05x" nicht gelöst hätte. Die Tarif-Aufgabe löst er, indem er abwechselnd für beide Tarife für eine bestimmte Dauer die Gesamtkosten berechnet.

Dabei scheint er zunächst dem Paradoxon von Achilles und der Schildkröte zu unterliegen: Achilles macht einen Wettlauf mit einer Schildkröte, lässt ihr aber einen gewissen Vorsprung. Wenn Achilles bis zum Startpunkt der Schildkröte gelaufen ist, hat diese ebenfalls eine Strecke zurückgelegt. Wenn Achilles diese Strecke gelaufen ist, ist die Schildkröte schon wieder ein Stück weiter. Achilles muss auch dieses Stück zurücklegen, bevor er die Schildkröte einholen kann, aber bis er dieses Stück gelaufen ist, hat sich die Schildkröte wieder etwas bewegt. Dies geht immer so weiter, folglich kann Achilles nicht gewinnen. Die Auflösung des Paradoxons liegt darin, dass sowohl die zurückgelegten Streckenabschnitte als auch die Dauer für das Zurücklegen eines Abschnitts immer kürzer werden und die Gesamtstrecke und Gesamtzeit bis zum Überholen als konvergente Reihen dargestellt werden können.

Dennis unterliegt zunächst einem ähnlichen Paradoxon. Tarif 1 und Tarif 2 werden als Gegner in einem Kosten-Rennen betrachtet, das bei null Minuten Gesprächsdauer startet. Tarif 2 hat durch die höhere Grundgebühr einen Vorsprung von vier Euro. Nach 40 Minuten hat Tarif 1 diesen Vorsprung aufgeholt (Z. 113), aber bis dahin ist Tarif 2 auch teurer geworden und hat immer noch einen Vorsprung. Somit ist Tarif 1 „günstiger. Immer." (Z. 113) und die frühere Erkenntnis, dass sich Tarif 2 irgendwann lohnt, wird revidiert. Auf Nachfrage folgt allerdings die Bemerkung, dass es doch irgendwo einen Schnittpunkt geben muss: „irgendwann überholt er ihn" (Z. 119). Die folgende Berechnung erfolgt aber wieder gemäß dem Vorgehen bei Achilles und der Schildkröte: Abwechselnd wird die Gesprächsdauer bei Tarif 1 erhöht, um den Vorsprung bei Tarif 2 zu schließen, woraufhin festgestellt wird, dass Tarif 2 auch wieder teurer geworden ist (Z. 121 bis 126). Als er bemerkt, dass dieses Vorgehen nicht zum Ziel führt, weil der Abstand zwar kleiner, aber nicht null wird, wird das Verfahren fallen gelassen und die Kosten für einen größeren Wert berechnet: 100 Minuten, wobei zwischendurch auch „10 Minuten" oder „100 Euro" (Z. 127ff.) gesagt, aber nicht gemeint, wird. Letztendlich wird die Aufgabe durch systematisches Probieren (Intervallschachtelung) gelöst (Z. 137), wobei nur ein Fehler in der Dezimalstelle gemacht wird, der ihm nicht auffällt: 8 Minuten statt 80 Minuten. Somit beweist Dennis seine Problemlösekompetenz.

Die Umkehraufgabe bereitet wieder durch die Formelsprache Schwierigkeiten. Obwohl er die Tarif-Aufgabe komplett durch Kopfrechnen gelöst hat, benötigt er einen Taschenrechner um eine Wertetabelle für die Funktion x – 4 anzulegen (Z. 157ff.). Die Wertetabelle benötigt er, um den Graphen zu zeichnen, wofür ihm nicht zwei Punkte genügen, da er die Linearität offensichtlich nicht erkennt. Von der kreativen Lösung der Aufgabe 5 fällt er zurück auf ein vorgegebenes Verständnis von Mathematik: „Das wurde mir irgendwann mal erklärt, aber das habe ich wieder vergessen" (Z. 159). Das Zitat steht auch für ein passives Lernen, das dadurch erfolgt, dass etwas erklärt wird.

Seine Lösungsidee kann durchaus als durchdacht bezeichnet werden. Er zeichnet den Punkt ein, durch den die Funktion verlaufen soll. Es wird mit Hilfe der Wertetabelle im Taschenrechner eine beliebige Funktion eingezeichnet (Z. 170ff.) und dann versucht, die Funktion so anzupassen, dass sie durch den Punkt verläuft (Z. 186ff.). Nur den Punkt (2| 3) zu betrachten, genügt offenbar nicht. Möglicherweise ist dem Kollegiaten die Eindeutigkeit von Funktionen nicht bewusst. Die Notation ist für ihn völlig losgelöst von den Funktionswerten (z. B. Z. 188). Für den Zusammenhang benötigt er den Taschenrechner. Ihm scheint nicht bewusst zu sein, dass er den Wert auf der x-Achse für das x im Funktionsterm einsetzen kann, um den Wert auf der y-Achse zu erhalten. Durch systematisches Probieren mittels Intervallschachtelung für die y-Verschiebung findet er mit Hilfe der Wertetabelle im Taschenrechner eine Funktion die durch den gesuchten Punkt verläuft.

Zur Förderung wird vorgeschlagen, dass die Variablennotation durch einen erklärenden Text – da keine persönliche Förderung erfolgt – von Grund auf eingeführt wird. Dazu werden einfache Beispiele gezeigt und der Zusammenhang zur bekannten Notation hergestellt, indem Werte für die Variablen eingesetzt werden. Aufgaben dazu sollen Anwendungsbezug haben. Im nächsten Schritt werden Gleichungen eingeführt und durch einfache Beispiele veranschaulicht. Für Dennis ist vor allem wichtig, die Umformungsschritte nachzuvollziehen und nicht auswendig zu lernen. Sinnvoll erscheint der Vergleich mit einer Waage im Gleichgewicht. Auch hier sollen wieder Anwendungsaufgaben erstellt werden, um es zu ermöglichen die Sinnhaftigkeit des Lösens von Gleichungen erfahrbar zu machen. Für alle Aufgaben wird eine detaillierte Musterlösung zur Selbstkontrolle erstellt, sodass Fehler sich nicht einprägen und ggf. eine Lehrkraft gefragt werden kann.

3.5.5 Eduard

Eduard besucht den ersten Oberstufenjahrgang und hat das Studienfach Mathematik belegt. Das Transkript ist im Anhang ab Seite 117 abgedruckt.

Wie das gewählte Studienfach erwarten lässt, treten beim Lösen der Diagnoseaufgaben nur wenige Schwierigkeiten auf. Die Motivation, am Interview teilzunehmen, dürfte in der Freude an der Mathematik liegen. Schwierigkeiten hat er im Umgang mit Brüchen.
Bei der ersten Aufgabe formt er die Gleichung korrekt zu

$$\frac{5}{3\frac{1}{3}} = x \quad \text{(Z. 15)}$$

um und merkt an, dass das Ergebnis nicht stimmen könne, da „jetzt sowas Krummes rauskommt" (Z. 14). Hier zeigt sich zum Einen eine Strategie beim Mathematikanwenden, die auf den Schulunterricht ausgerichtet ist und „glatte" Lösungen bevorzugt. Zum Anderen zeigt die Aussage, dass Eduard Probleme hat, durch einen gemischten Bruch zu dividieren. Auf Nachfrage durch den Interviewer, ob man den Bruch „noch anders schreiben" (Z. 17) könne, wird die Gleichung umgeformt zu $\frac{5}{3,\overline{3}} = x$ (Z. 19), was ihm für die weitere Rechnung aber auch nicht weiter bringt. Er berechnet zunächst $x = 5,\overline{5}$ (Z. 21), wobei nicht genau klar wird, auf welche Weise dies berechnet wurde. Einen Hinweis liefert aber die darauf folgende Aussage, in der die Rechnung wieder verworfen wird: „Wenn jetzt hier 3,3 stehen würde oben, dann wär's ja, dann wär's ja eins." (Z. 24). Gemeint könnte sein, dass ein Widerspruch festgestellt wird zwischen dem bekannten $\frac{3,\overline{3}}{3,\overline{3}}=1$ und $\frac{3,\overline{3}}{3,\overline{3}}=3,\overline{3}$, was aus analoger Rechnung zur eben durchgeführten folgen würde.

Die Zweifel an der bisherigen Rechnung sind so groß, dass von vorne begonnen wird (Z. 26ff.), was jedoch wieder zum selben Ergebnis mit dem gemischten Bruch im Nenner führt. Die nochmalige Rechnung wird der Suche nach einem Fehler vorgezogen. Es zeigt sich diesmal bereits bei der Subtraktion $4-\frac{2}{3}$ eine Unsicherheit und der Kollegiat fragt, ob ein Taschenrechner benutzt werden darf (Z. 34). Als dies verneint wird, löst er die Subtraktion korrekt (Z. 37), gibt im nächsten Schritt aber auf und bittet darum, mit der nächsten Aufgabe fortfahren zu können (Z. 52). Es zeigt sich eine Unsicherheit im Umgang mit Brüchen, die in der Regel dank des Taschenrechners für den Erfolg im Mathematikunterricht keine große Rolle spielt. Für komplexere Rechnungen und ein tieferes Verständnis der Rechnungen wäre es aber hilfreich, die fehlende Kompetenz aufzubauen.

Die Gleichung der zweiten Aufgabe wird problemlos gelöst. Eduard merkt an, dass es „egal" (Z. 68) sei, ob nach x oder nach b aufgelöst werde, entscheidet sich aber für x. Möglicherweise deutet das auf ein Variablenverständnis hin, das Variablen stets als unbekannte, zu berechnende Größen betrachtet und nicht zum Beispiel als gegebene Parameter.

Der Term in der dritten Aufgabe wird umgeformt zu $x^2 + 25$ (Z. 87). Hier wurde zunächst eine unzulässige Linearisierung vermutet. Wie sich aber später herausstellt, liegt der Fehler hier darin, dass das Lösungsschema einer anderen binomischen Formel angewendet wurde (Z. 96). Durch explizites Ausmultiplizieren bemerkt Eduard aber seinen Fehler und kann ihn auch benennen (Z. 88ff.).

Die Bevölkerungsaufgabe wird problemlos gelöst. Die Milliarden werden korrekt in Millionen umgerechnet (Z. 103) und ein linearer Funktionsterm für die Bevölkerungsentwicklung aufgestellt (Z. 107). Es wird bestimmt, wann die Funktion den Wert 10 000 erreicht (Z. 117).

Die Tarif-Aufgabe wird ebenfalls problemlos bearbeitet, wobei für beide Tarife eine Kostenfunktion aufgestellt wird, von denen der Schnittpunkt durch Gleichsetzen berechnet wird. Die Euro-Beträge werden dabei in Cent-Beträge umgerechnet. Dadurch treten auch keine Dezimalbrüche auf, die möglicherweise zu ähnlichen Schwierigkeiten wie in Aufgabe 1 geführt hätten.

Bei der Umkehraufgabe wird die Funktion „f(x) = 3" (Z. 157) angegeben und dann eine lineare Funktion mit der Steigung 1 bestimmt, die durch den Punkt (2|3) geht. Dazu wird zunächst der Graph der Funktion gezeichnet, um die Werte im Schema „a x + b" (Z. 172) zu bestimmen. Dabei wird a = 1 festgelegt, aber statt des y-Achsenabschnitts b wird zunächst die Nullstelle -1 (Z. 163) eingetragen. Der Fehler wird aber bemerkt und korrigiert (Z. 169). Das Schema wurde also nicht nur verwendet, sondern auch verstanden. Dies wird auch die ausführliche Erklärung deutlich, wie eine lineare Funktion durch einen beliebigen Punkt gefunden werden kann.

Die wenigen Schwierigkeiten im Diagnoseinterview lagen im Bruchrechnen. Zur Förderung wird dazu eine wiederholende Einführung in die Division durch Brüche gegeben. Da dem Kollegiaten seine Stärken bewusst sind, besteht die Gefahr, dass er das Förderangebot als nicht ernsthaft zurückweist. Deswegen wird er darauf hingewiesen, dass sich nur um eine Wiederholung von längst Bekanntem handelt, dass etwas aufgefrischt werden sollte.

3.5.6 Florian

Florian ist Kollegiat im ersten Oberstufenjahrgang und besucht keinen Mathematik-Brückenkurs. Das vollständige Transkript findet sich im Anhang ab Seite 129.

Er ist sehr gut im Kopfrechnen mit den Grundrechenarten und führt beispielsweise auch die Division von Dezimalbrüchen korrekt im Kopf durch. Einige im Unterricht übliche Verfahren beherrscht er nicht. Er hat jedoch ein so fundiertes mathematisches Verständnis, dass er die Aufgaben auch ohne fertige Verfahren lösen kann, indem er neue Verfahren erfindet. Für ihn stellen somit viele eigentlich einfache Aufgaben, bei denen die Reproduktion von Unterrichtswissen reichen würde, Problemlöseaufgaben dar, weil erst ein Verfahren entwickelt werden muss. Florian ist somit in der Lage, auch Aufgabentypen zu bearbeiten, die nicht im Unterricht behandelt wurden, könnte viele Aufgaben aber effizienter Lösen, wenn er die Verfahren beherrschen würde. Außerdem hat der Kollegiat leichte Schwierigkeiten im Umgang mit gemischten Brüchen.

Auch Florian benutzt die Sprechweise, dass „das x auf Seite" (Z. 2) zu bringen. Er führt aber auf beiden Seiten dieselbe Operation durch und subtrahiert 4x (Z. 4). Er berechnet $4-\frac{2}{3}$ und erhält zunächst korrekterweise $\frac{10}{3}$. Er überprüft seine Rechnung noch einmal und erhält $\frac{11}{3}$. Dabei hat er zunächst $4-\frac{2}{3}=3\frac{1}{3}$ gelöst und das Ergebnis umgerechnet. Zunächst wurde die ganze 3 in Drittel umgerechnet: „drei Drittel ist eins. Das heißt neun" (Z. 8). Dann ereignete sich offenbar ein Flüchtigkeitsfehler und es wurden nicht ein Drittel addiert, sondern zwei Drittel, die auf der linken Seite der Gleichung stehen. Für die Gleichung $\frac{-11}{3}x=\frac{-15}{3}$ gibt er allerdings keine Lösung an, da er das Ergebnis „seltsam" findet. Hier zeigt sich zum einen eine typische Schülerstrategie zum Erkennen von korrekten Lösungen: Er erwartet eine ganze Zahl oder einen einfachen Bruch als Lösung, keine „krumme" Zahl. Florian hat diese Strategie, wie die Bevölkerungsaufgabe 4 zeigt, anscheinend perfektioniert: Er kombiniert die Zahlen manchmal „nach Gefühl" – das ihn allerdings nicht täuscht – führt aber zunächst im Kopf eine Überschlagsrechnung durch und wählt dann jene Kombination, die das plausibelste Ergebnis verspricht (Z. 73ff).

Die erste Aufgabe wird auf Grund des unerwünschten Ergebnisses von vorne begonnen, wobei die Lösungsschritte in anderer Reihenfolge durchgeführt werden (Z. 14ff.). Er erhält die Gleichung „ $5=3\frac{1}{3}x$ " (Z. 19) und hat im Folgenden Schwierigkeiten durch den gemischten Bruch zu teilen. Er berechnet in mehreren Schritten $5:3\frac{1}{3}\approx 3{,}31$ (Z. 31). Als Zwischenschritt schreibt er „x = 1 + 0,66 + 1,65" (Z. 27/30). Durch die Nachfragen durch den Interviewer ergibt sich, dass dabei folgendermaßen gerechnet wurde: Zunächst wurde die Rechnung unzulässig linearisiert. Dann wurde aus der Division durch den Kehrwert einer natürlichen Zahl (3) die Multiplikation mit diesem Kehrwert. Insgesamt ergibt sich $5:3\frac{1}{3}=5:3+5\cdot\frac{1}{3}=1+\frac{2}{3}+5\cdot\frac{1}{3}\approx 3{,}31$. Die Rechnungen wurden im Kopf durchgeführt. Dezimalbrüche werden der Darstellung mit ganzzahligem Zähler und Nenner offenbar vorgezogen.

Die Lösung 3,31 wird vom Kollegiaten verworfen, als er seinen Lösungsweg erklärt. Denn dort bemerkt er, dass die Lösung zwischen 1 und 2 liegen muss (Z. 39). Er dividiert erneut, diesmal ohne zu Linearisieren, sondern durch Auffüllen der 5. Er bemerkt zunächst, dass $3\frac{1}{3}$ einmal in 5 hineinpasst und dass $1\frac{2}{3}$ übrig bleiben. Diese rechnet er in einen ungemischten Bruch um und bemerkt, dass $\frac{5}{3}$ die Hälfte von $3\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ ist (Z. 39ff.). Letzteres wird dabei im Kopf umgerechnet ohne den Widerspruch zum ersten Lösungsversuch wahrzunehmen (Z. 9). Zusammen ergibt sich die korrekte Lösung „x = 1,5" (Z. 42). Die Lösung der Aufgabe zeugt von einem guten Zahlenverständnis, ist aber nicht besonders effizient.

Aufgabe 2 wird ohne Probleme gelöst und ergibt keinen Anlass für weitere Nachfragen. Aufgabe 3 wird ebenfalls ohne Probleme gelöst. Zu bemerken ist, dass die Klammer ohne Zuhilfenahme einer binomischen Formel, sondern durch Ausmultiplizieren gelöst wurde (Z. 67). Dies ist konsistent dazu, dass Formeln und fertige Verfahren von Florian vermieden werden.

Die Bevölkerungsaufgabe weckt auch bei Florian Erinnerungen an den Unterricht und er betrachtet ein exponentielles Wachstum, bei dem die Zunahme nur im ersten Jahr den in der Aufgabe angegebenen 83 Millionen entspricht. Dazu berechnet er zunächst das prozentuale Wachstum im ersten Jahr (Z. 74ff.). Er macht dabei einen Fehler bei der Umrechnung der Millionen in Milliarden und rechnet mit 0,83 Milliarden (Z. 73). Den Prozentwert berechnet er auf eine umständliche Weise im Kopf, erhält aber ein gutes Ergebnis. Er folgt seinem Gefühl für den richtigen Lösungsweg: Er teilt zunächst 7,1 durch 0,83 und teilt anschließend 100 durch den Quotienten. Die Rechnung erfolgt jeweils durch Auffüllen: Von 0,83 wird das Doppelte, das Vierfache und das Achtfache durch wiederholte Verdopplung berechnet (Z. 75ff.). Er bemerkt, dass das Achteinhalbfache von 0,83 etwas mehr als 7,1 ist und gibt $7{,}1 : 0{,}83 \approx 8{,}4$ (Z. 80) an. 100 : 8,4 wird auf dieselbe Weise berechnet, das Ergebnis ist 11,9 (Z. 84). Das Ergebnis des Kopfrechnens liegt sehr nahe am tatsächlichen Wert (ca. 11,7). Er addiert 100% für den bisherigen Bestand und stellt somit die Gleichung $7{,}1 \cdot 1{,}12^t = 10$ (Z. 88ff.) auf. Florian hat also eine Gleichung für exponentielles Wachstum selbstständig und korrekt hergeleitet.

Bei der Tarif-Aufgabe schließt er zunächst aus der Formulierung der Aufgabenstellung auf die Lösung: Er schließt daraus, dass ein Tarif für WenigtelefoniererInnen günstig ist, der andere für VieltelefoniererInnen (Z. 100). Die Fragestellung würde für ihn sonst als Mathematikaufgabe keinen Sinn ergeben. Hier zeigt sich eine im Mathematikunterricht antrainierte Strategie. Der Kollegiat erkennt zutreffend, dass der Tarif mit niedriger Grundgebühr günstiger ist, wenn wenig telefoniert wird und dass der Tarif mit niedrigem Minutenpreis günstiger ist, wenn viel telefoniert wird (Z. 100).

Im Folgenden zeigt sich wieder, dass Florian fertige Unterrichtsverfahren vermeidet und stattdessen neue Verfahren entwickelt. Die Aufgabenstellung liefert eine typische Situation für das Gleichsetzen von zwei Funktionstermen. Da der Interviewte sicher im Lösen von Gleichungen ist, hätte ihm dieses Verfahren für einen kurzen Lösungsweg offen gestanden. Er löst die Aufgabe nicht analytisch, sondern numerisch und legt eine Tabelle an, in der er die Tarife vergleicht. Er geht dabei systematisch, aber nicht besonders effizient vor. Für verschiedene Minutenpreise berechnet er die Kosten für beide Tarife in Schritten von 10 Minuten (Z. 105ff.). Dabei macht er sich zu Nutze, dass die Kostenfunktionen linear verlaufen, also immer ein konstanter Wert addiert wird, wenn weitere 10 Minuten telefoniert wurden. Die Berücksichtigung der Grundgebühr muss somit nur ein einziges Mal pro Tarif erfolgen.

Die Gleichheit der Kosten, d. h. der Schnittpunkt der Kostenfunktionen wird von ihm nicht mit dem „Überholen" in Verbindung gebracht. Er notiert bei beiden Tarifen, dass sie bei 80 Minuten 9 Euro kosten, berechnet dann aber noch die Werte für 90 Minuten und bemerkt, dass „nach 90 Minuten Telefonierzeit […] Tarif 1 teurer geworden" (Z. 126) ist. Auf die Nachfrage, ob es genau 90 Minuten seien, versucht er den Wert zwischen 80 und 90 Minuten zu finden, bei dem Tarif 1 das erste Mal teurer ist als Tarif 2 und nähert sich der 80 schrittweise (Z. 131ff.) – bzw. 8, weil er zum Schluss das Komma versehentlich um eine Stelle verschiebt.

Bei der Umkehraufgabe gibt er zunächst eine proportionale Funktion an, die durch $(2|3)$ verläuft: „$F(x) = 1{,}5x$" (Z. 154). Die zweite Funktion findet er auf umständlicherem Wege: Er spiegelt den Punkt $(2|3)$ an der x-Achse, findet eine Zahl a, die $x - a = -3$ für $x = 2$ erfüllt, also $a = 5$, und spiegelt die entstandene Funktion wieder an der x-Achse (Z. 157f.), sodass er „$F(x) = (x - 5) \cdot (-1)$" (Z. 159) erhält. Somit hat er die Aufgabe umständlich, aber zielführend gelöst. Hier zeigt sich wieder, dass jede Aufgabe für Florian eine Problemlöseaufgabe darstellt.

Bei der Aufforderung, die Funktionsgraphen zu zeichnen zitiert er allgemeine Form einer linearen Funktion als „m x + b" und versucht, die Werte für m und b in seinen Funktionsgleichungen zu bestimmen. Er identifiziert die Steigung in seiner ersten Funktion, ihm gelingt es aber nicht, diese Erkenntnis für eine Zeichnung zu nutzen. Vermutlich hätte Florian aber auch für das Zeichnen des Graphen ein Verfahren entwickeln können, zum Beispiel über eine Wertetabelle.

Die Lösungen der Tarif-Aufgabe und der Umkehraufgabe deuten darauf hin, dass Florian zwar ein tief gehendes numerisches Verständnis, d. h. ein gutes Verständnis bei der Berechnung einzelner Werte, hat. Ihm fehlt aber eine Vorstellung von Funktionsverläufen. Auch die Bevölkerungsaufgabe steht nicht im Widerspruch dazu, wenn man nur natürliche Werte für die Funktionsvariable zulässt, denn dann stellt der Term nur eine Berechnungsvorschrift diskreter Zeitpunkte dar.

Florian ist in der Lage, viele Aufgaben zu lösen, indem er eigene Verfahren entwickelt. Seine Problemlösefähigkeit erstreckt sich dadurch auf weit mehr als die ihm bereits bekannten Aufgabentypen. Trotzdem wäre es für ihn sinnvoll, einige besonders häufig benötigte Verfahren zu lernen. Da ein tief greifendes Verständnis vorhanden ist, können die Verfahren trainiert werden, ohne die Gefahr einzugehen, dass sie letztendlich nur beherrscht und nicht verstanden werden. Die Förderung liegt hier darin, dass Florian die Diagnose mitgeteilt wird und ihm nahe gelegt und begründet wird, Verfahren zu lernen, da er damit effizienter Arbeiten könnte. Ob er sich darauf einlässt, muss er dann selbst entscheiden. Erfolgreich kann er auch mit seiner bisherigen Strategie sein. Zur Verbesserung der Vorstellung von Funktionen eignet sich dynamische Geometrie-Software. Durch dynamisches Verändern von Funktionsparametern kann die entsprechende Auswirkung auf den Graphen betrachtet werden. Hierzu werden einige Geogebra-Dateien entwickelt. Die Aufgabe besteht jeweils darin, die Veränderung verschiedener Parameter vorherzusagen und nachzuvollziehen.

4 Fazit

Bei den meisten Interviews konnten Denkmuster gefunden werden, mit denen sich das Lösungsverhalten bei mehreren Aufgaben erklären lässt. Für eine sicherere Analyse wären aber weitere Informationen über den jeweiligen Interviewpartner bzw. die jeweilige Interviewpartnerin hilfreich gewesen. Über die KollegiatInnen ist außer Geschlecht, Jahrgangsstufe und ob ein Brückenkurs belegt wurde oder nicht, nur so viel bekannt, wie sie von sich aus im Interview preisgaben. Weitere individuelle Hintergründe, beispielsweise über den bisherigen Bildungsweg, wären aber nützlich für die Analyse gewesen (vgl. Boller et al. 2008a, 96ff.). LehrerInnen in der Praxis können bei der Vorbereitung und Durchführung von Diagnoseinterviews Beobachtungen der Beteiligung und Verhaltens im Unterricht, des Verhaltens in den Pausen und Leistungen in anderen Fächern berücksichtigen. In diesem Fall wäre es auch möglich und sinnvoll, die Auswahl der Diagnoseaufgaben von der/dem getesteten SchülerIn abhängig zu machen. Optimalerweise werden die Aufgaben speziell für den einzelnen Kollegiaten ausgewählt und geplant, was auch die spezifische Aufstellung von erwarteten Fehlern betrifft.

Vor und nach dem Lösen der Aufgaben wären auch Fragen zur Selbsteinschätzung der betreffenden Kompetenzen sinnvoll gewesen, um diese Selbstsicht auf die eigenen Kompetenzen mit den Erkenntnissen aus der Diagnose vergleichen zu können. Die Frage zur Selbsteinschätzung vor der jeweiligen Aufgabe hätte dabei aber so allgemein gehalten werden müssen, dass kein Hinweis auf einen möglichen Lösungsweg gegeben wird, um eine Beeinflussung zu vermeiden.

Die Aufgaben haben allesamt Hinweise auf die Denkstrukturen der KollegiatInnen liefern können. Die meisten Erkenntnisse gingen aber von den Aufgaben 1 (Gleichung mit Bruch), 5 (Tarife) und 6 (Umkehrung) aus. Schwierigkeiten in der Bruchrechnung, die eine sehr häufige Fehlerquelle darstellten, traten auf Grund der Aufgabenstellung fast ausschließlich bei Aufgabe 1 auf. Aufgabe 2 (Gleichung mit Parameter) lieferte zwar einige Erkenntnisse, die aber größtenteils redundant zu jenen waren, die schon auf der Basis von Aufgabe 1 getroffen werden konnten. Fehler aus der Eingangsdiagnose traten auch bei den Interviews auf und standen oft auf im Zusammenhang mit Fehlern und Schwierigkeiten bei anderen Aufgaben. Durch ihre Kalkülhaftigkeit und die Geschlossenheit sind diese Aufgaben und auch die dritte Aufgabe vor allem geeignet, um Schwierigkeiten im Zusammenhang mit der Notation oder beim automatisierten Lösen von Gleichungen zu identifizieren. Die dritte Aufgabe (binomische Formel) brachte über die Erkenntnisse aus den ersten beiden Aufgaben hinaus kaum einen Gewinn.

Die vierte Aufgabe (Bevölkerungsentwicklung) war insofern geeignet, als sie zeigen konnte, wie weit sich die KollegiatInnen bei ihren Gedanken am Unterricht orientieren oder ob sie sich davon lösen können. Dies war aber nicht die eigentliche Intention der Aufgabe, weswegen besser ein anderer Anwendungsbezug hätte hergestellt werden können. Aufschlussreich war aber die Offenheit, sodass auch analysiert werden kann, welcher Weg gewählt wird.

Dies gilt auch für die letzten beiden Aufgaben. Die Anforderung, Kompetenzen möglichst scharf zu messen, wird dadurch zwar nicht erfüllt. Das ist bei einer Diagnose, die weder der Leistungsbewertung noch einer Verallgemeinerung dienen soll, aber auch gar nicht dringend erforderlich. Im Gegenteil ermöglicht die Offenheit auch überraschende, aber nützliche Erkenntnisse über mathematische Kompetenzen.

Im Rückblick sind die Aufgaben insgesamt zu umfangreich gewesen. Die Absicht dahinter war, möglichst viele Kompetenzen abzudecken. In vielen Interviews, gerade in denjenigen, wo offensichtlich Defizite in mehreren Bereichen bestehen, führte die entstehende Zeitnot dazu, dass Rückfragen für eine genaue Diagnose unterblieben sind, um mit der nächsten Aufgabe fortfahren zu können. Den SchülerInnen waren ca. 30-minütige Interviews angekündigt worden, die Interviews mit Christina (40 Minuten) und Dennis (37 Minuten) dauerten aber deutlich länger. Trotzdem sollte aber stets mehr als nur eine Aufgabe eingesetzt werden, denn nur so lassen sich Muster über mehrere Aufgaben hinweg erkennen.

Ideal wäre es, wenn die gestellten Aufgaben von den Erkenntnissen im bisherigen Interviewverlauf abhängig gemacht würden. Wie sich aber bei den Interviews am Oberstufen-Kolleg zeigt, ergibt sich oft erst bei der intensiven Analyse der Mitschnitte ein Bild über die Denkmuster des Schülers. Einige Erkenntnisse kamen erst nach der fünften Durchsicht der Notizen zu den Mittschnitten zustanden und womöglich lassen die Mitschnitte noch weitere Einsichten zu.

Sinnvoll war die vorherige Planung der Aufgaben, die Erstellung von Musterlösungen und die Aufstellung möglicher Fehler. Zwar zeigte sich, dass die tatsächlichen Fehler oft von den erwarteten abweichen und die Fehler somit kaum planbar sind, aber schon das bewusste Nachdenken über Fehlerquellen hilft, später auch andere Fehler einordnen zu können. Sinnvoll wäre es aber gewesen, wenn für die besonders häufigen Fehler geplant worden wäre, wie Widersprüche erzeugt werden können, um nicht durch Nachfragen direkt auf den Fehler hinzuweisen.

Denn Fragen zum Vorgehen der/des Interviewten werden natürlich vor allem an den Stellen gestellt, an denen nicht klar ist, wie es zu einem Fehler kam. Insbesondere finden Nachfragen also vor allem dort statt, wo ein Fehler aufgetreten ist. SchülerInnen der Oberstufe fassen solche Nachfragen dann völlig zutreffend als Hinweis auf, dass ihnen ein Fehler unterlaufen ist. Als Antwort liefern sie dann meist keine Erklärung ihres eigentlichen Vorgehens, sondern versuchen, den Fehler zu korrigieren. Ein Beispiel findet sich im Interview mit Adrian, der gefragt wird, warum er einen bestimmten Umformungsschritt vorgenommen hat (Z. 26f.):

I: Okay. Wieso hast du durch 4x geteilt, warum z. B. nicht mal 4x oder minus 4x oder plus 5 oder was auch immer?

S: Stimmt, das war blöd, ne? Ich hätte plus 4x.

In der Grundschule ist es sicherlich ungefährlicher, direkte Fragen zu stellen als in der Oberstufe. In der Oberstufe muss noch stärker darauf geachtet werden, sich durch die gestellten Fragen nicht zu verraten. Eine sinnvollere Strategie ist es, einen Widerspruch zu erzeugen oder strukturähnliche Aufgaben zu stellen und dort die Lösung zu beobachten. Dies ist aber in der interaktiven Interviewsituation nicht immer möglich, weil nur relativ wenig Bedenkzeit besteht. Wenn die bisherige Rechnung erklärt werden soll, ist es sinnvoller, nicht einzelne Schritte herauszugreifen, sondern die komplette Rechnung durchzugehen, um keine Hinweise zu geben.

Weitere unerwünschte Einflüsse durch den Interviewer entstehen durch suggestive Fragen, die nicht immer leicht zu vermeiden sind. Hier ist wohl vor allem Übung und Selbstreflexion sinnvoll, um solche Fragen auf lange Sicht zu vermeiden.

Eine große Schwierigkeit zeigte sich darin, sich einerseits am Leitfaden zu orientieren und andererseits auf den Interviewpartner einzugehen. Der Vorteil eines Leitfadens für eine bessere Vergleichbarkeit der Interviews ist aber an dieser Stelle auch gar nicht so wichtig, weil keine verallgemeinerten Aussagen getroffenen werden sollten, sondern Einzelfallstudien geführt wurden.

Insgesamt bestätigte sich, dass Interviews viel mehr Aussagen ermöglichen als eine reine Analyse von dokumentierten Lösungen. Florian und Bianca lösen beispielsweise beide viele der Aufgaben, aber haben eine völlig unterschiedliche Herangehensweise. Bianca nutzt automatisierte Verfahren fehlerfrei, Florian nutzt keine automatisierten Verfahren, sondern erfindet jedes Mal eigene Verfahren. Die Interviews ermöglichen eine Diagnose also selbst dann, wenn die Aufgaben korrekt gelöst wurden. Multiple-Choice-Tests oder auch Tests, bei denen nur eine Lösung, aber kein Lösungsweg eingetragen wird, bieten diese Chance nicht. Auch die Eingangsdiagnose am Oberstufen-Kolleg lässt keine valide Diagnose zu, mit der sich spezifische Fördermaßnahmen begründen lassen. Ihr Einsatz ist eher dem Umstand geschuldet, innerhalb kurzer Zeit einige hundert Kompetenzeinschätzungen durchführen zu müssen.

Auch wenn vor allem die Exploration des Diagnoseverfahrens das Ziel dieser Arbeit war, sei eine allgemeine These über den Mathematikunterricht dennoch gestattet: Gemischte Brüche sollten im Mathematikunterricht eine kleinere Rolle spielen. Im Alltag sind gemischte Brüche fast ausschließlich bei Zahlen üblich, bei denen der gebrochene Teil ein Halb ist: „eineinhalb Stunden", „viereinhalb Tage". Brüche mit größerem oder gar zweistelligem Nenner kommen so gut wie gar nicht vor und haben auch in der Wissenschaft keine Bedeutung. Die im Alltag üblichen gemischten Brüche sollten daher in der Schule thematisiert werden, es sollte aber nicht wie oft üblich gefordert werden, sämtliche Brüche, bei denen der Betrag des Zählers größer als der des Nenners ist, als gemischten Bruch zu schreiben. In den Interviews zeigten sich verschiedene Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit gemischten Brüchen stehen. Vor allem beim Teilen durch einen gemischten Bruch hatten viele KollegiatInnen Schwierigkeiten. Gemischte Brüche können dazu dienen, den Wert einer rationalen Zahl auf dem Zahlenstrahl anzugeben oder um Zahlen miteinander vergleichen zu können. Sie eignen sich daher höchstens als Ergebnisse am Ende einer Rechnung, aber nicht als Zwischenergebnisse.

Des Weiteren zeigt sich als Problemquellen für die SchülerInnen das Nebeneinanderschreiben von Koeffizienten und Variablen ohne einen Operator, Wissenslücken in Bezug auf frühere Jahrgänge, insbesondere im Hinblick auf die Bruchrechnung und ein Mathematikverständnis, das von auswendig zu lernenden Rechenregeln geprägt ist. Letzteres hängt vermutlich eng mit den Wissenslücken zusammen: Durch die Lücken ist ein Begreifen des aktuellen Unterrichtsgeschehens nicht mehr möglich, sodass Regeln auswendig gelernt werden, um bestehen zu können. Dass die Regeln nicht einfach erfunden und willkürlich sind, dürfte allen OberstufenschülerInnen bewusst sein. Für ihren Zugang zur Mathematik ist dieses Bewusstsein aber irrelevant, da sie sich schlicht nicht mehr „mitkommen".

Eine Diagnose sollte deswegen in allen Jahrgängen selbstverständlicher Teil des Unterrichts sein und nicht erst dann eingesetzt werden, wenn Defizite unübersehbar sind.

Literaturverzeichnis

APO-OS – Verordnung des Landes NRW zum Oberstufen-Kolleg vom 20. Juni 2002, zuletzt geändert durch Artikel 7 der Verordnung vom 10. Juli 2011.

Aebli, Hans (2006): Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Medien und Inhalte didaktischer Kommunikation, der Lernzyklus, 13. Auflage (1. Auflage 1983). Stuttgart: Klett-Cotta.

Baruk, Stella (1989): Wie alt ist der Kapitän? Über die Irrtümer in der Mathematik. Basel u. a.: Birkhäuser.

Bathe, Silvia/Kemper, Angela/Lau, Ramona/Rosowski, Elke/Wäcken, Martina (2008): Schulentwicklung zum Thema Innere Differenzierung im Unterricht der Sekundarstufe II. Erfahrungen am Oberstufen-Kolleg Bielefeld. In: TriOS, 3 (2008) 1, S. 35–62.

Boller, Sebastian/Kobusch, Adriane-Bettina/Marth, Julia/Müller, Marlene/Roether, Silke/Rosowski, Elke/Schneider, Agnes (2008a): Heterogenität in der gymnasialen Oberstufe: Individuelle Förderung auf dem Weg zur Hochschulreife. In: TriOS, 3 (2008) 1, S. 63–137.

Boller, Sebastian/Rosowksi, Elke/Stroot, Thea (2008b): Schulische Heterogenität und individuelle Förderung. In: Keuffer, Josef (Hrsg.) (2008): Was braucht die Oberstufe? Weinheim: Beltz, S. 170–181.

Boller, Sebastian/Möller, Martina (2009): Diagnose, Beratung und Förderung am Oberstufen-Kolleg Bielefeld. Welche Unterstützungsangebote brauchen Schüler(innen) mit heterogenen Lernausgangslagen? In: Pädagogik (Weinheim), 61 (2009) 12, S. 28–31.

Brandt, Alexander (2008): Einzelschuldiagnostik mit fokussierten Instrumenten der Systemdiagnostik. In: Keuffer, Josef (Hrsg.) (2008): Was braucht die Oberstufe? Weinheim: Beltz, S. 250–262.

Brauner, Uli (2007): Schatzsuche statt Fehlerfahndung. Diagnoseaufgaben selbst erstellen. In: PM 49 (2007) 15, S. 19–22.

van den Brink, Jan (1981): Mutual Observation. In: For the Learning of Mathematics, 2 (1981) 2, S. 29–30.

Brueckner, Leo John (1935): Diagnosis in Arithmetic. In: The yearbook of the National Society for the Study of Education, 34 (1935), Bloomington, IL, u. a. Public School Publishing Co, S. 269–302.

Büchter, Andreas/Leuders, Timo (2007): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen, 3. Auflage, Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Chomsky, Noam (1969): Aspekte der Syntax-Theorie, Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Clauß, Günter (1977): Verbalisationseffekte beim Lernen. In: Lompscher, Joachim (Hrsg.): Zur Psychologie der Lerntätigkeit, Berlin: Volk und Wissen, S. 143–153.

Cox, L.S. (1975): Systematic Errors in the Four Vertical Algorithms in Normal and handicapped Population. In: Journal for Research in Mathematics Education, 6 (1975) 4, S. 202–220.

Fischbein, Efraim/Tirosh, Dina/Stavy, Ruth/Oster, Anat (1990): The autonomy of mental models. In: For the learning of mathematics, 10 (1990) 1, S. 23–30.

Gasse, Michael (2006): Stark machen. Individuelle Förderung als neue Leitidee. In: forum schule, (2006) 2, S. 16–30. URL: http://www.partner-fuer-schule.nrw.de/dev/t3/fileadmin/user_upload/forum-schule/forum-schule-archiv/fs17/magtma1.html [aufgerufen am 09.08.2012].

Ginsburg, Herbert P. (1977): The Psychology of Arithmetic Thinking. In: The Journal of Children's Mathematical Behaviour, S. 1–89.

Glässing, Gabriele/Sterzik, Carmen (2008): Die Sprachbewusstheit verbessern: Wege der Sprachförderung in der Oberstufe. In: TriOS, 3 (2008) 2, S. 7–57.

Griesel, Heinz (Hrsg.)/Postel, Helmut (Hrsg.)/vom Hofe, Rudolf (Hrsg.) u. a. (2005a): Mathematik heute. 5. Realschule. Braunschweig: Schroedel.

Griesel, Heinz (Hrsg.)/Postel, Helmut (Hrsg.)/vom Hofe, Rudolf (Hrsg.) u. a. (2005b): Mathematik heute. 6. Realschule. Braunschweig: Schroedel.

Griesel, Heinz (Hrsg.)/Postel, Helmut (Hrsg.)/vom Hofe, Rudolf (Hrsg.) u. a. (2006): Mathematik heute. 7. Realschule. Braunschweig: Schroedel.

Griesel, Heinz (Hrsg.)/Postel, Helmut (Hrsg.)/vom Hofe, Rudolf (Hrsg.) u. a. (2007): Mathematik heute. 8. Realschule. Braunschweig: Schroedel.

Griesel, Heinz (Hrsg.)/Postel, Helmut (Hrsg.)/vom Hofe, Rudolf (Hrsg.) u. a. (2008a): Mathematik heute. 9. Realschule. Braunschweig: Schroedel.

Griesel, Heinz (Hrsg.)/Postel, Helmut (Hrsg.)/vom Hofe, Rudolf (Hrsg.) u. a. (2008b): Mathematik heute. 10. Realschule. Braunschweig: Schroedel.

Hafner, Thomas/vom Hofe, Rudolf (2008): Aufgaben analysieren und Schülervorstellungen erkennen. Diagnostische Interviews zur Prozentrechnung. In: mathematik lehren 150, S. 14–19.

vom Hofe, Rudolf/Hafner, Thomas/Blum, Werner/Pekrun, Reinhard (2009): Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen in der Sekundarstufe – Ergebnisse der Längsschnittstudie PALMA. In: Heinze, Aiso/Grüßing, Meike (Hrsg.): Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium, Münster: Waxmann, S. 125–146.

Horstkemper, Marianne (2006): Fördern heißt diagnostizieren. In: Ahlring, Ingrid/Becker, Gerold (Hrsg.): Friedrich Jahresheft (2006), Seelze: Friedrich, S. 4–7.

Hunting, Robert P. (1997): Clinical Interview Methods in Mathematics Edutaion Research and Practice. Journal of Mathematical Behaviour, 16 (1997) 2, S. 145–165.

Hußmann, Stephan/Leuders, Timo/Prediger, Susanne (2007): Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. In: PM, 49 (2007) 15, S. 1–8.

Jordan, Alexander/vom Hofe, Rudolf (2008): Diagnose von Schülerleistungen. „Schlüssel” zu individuellen Förderung. In: mathematik lehren, 150, Seelze: Friedrich, S. 4–12.

Kagan, Jerome S./Kogan, Nathan (1970): Individuality and Cognitive Performance. In: Mussen, Paul Henry (Hrsg.): Carmichael's Manual of Child Psychology, 3. Ausgabe, New York: Harper & Row.

Klenck, Wolfgang/Schneider, Susanne (2008): Mit wenig Last, etwas List und viel Lust: Ein individuelles Förderprogramm aufstellen. In: Schulmagazin 5 bis 10, Heft 2008/4, S. 9–12.

Krauthausen, Günter/Scherer, Petra (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik, 3. Auflage, München: Spektrum.

Kretschmann, Rudolf (2008): Individuelles Fördern. Von der Förderdiagnose zum Förderplan. In: Schulmagazin 5 bis 10, (2008) 4, S. 5–8.

Kultusministerkonferenz (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf [aufgerufen am 02.08.2012]

Lorenz, Jens Holger/Radatz, Hendrik (1993): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht, Hannover: Schroedel.

Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Meyer, Hilbert (2004): Was ist guter Unterricht? Berlin: Cornelsen Scriptor

Moser Opitz, Elisabeth (2005): Lernschwierigkeiten Mathematik in Klasse 5 und 8. Eine empirische Untersuchung zu fehlenden mathematischen Basiskompetenzen. In: Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, 74 (2005) 2, München: Reinhardt, S. 113–128.

Nisbett, Richard E./Wilson, Timothy DeCamp: Telling More Than We Can Know: Verbal Reports on Mental Processes. In: Psychological Review, 84 (1977) 3, S. 231–259.

Noack, Monika et al. (2008): Känguru der Mathematik. Aufgaben und Lösungen für die Klassenstufen 7 bis 13. Berlin: Humboldt-Universität

Piaget, Jean (1974): Urteil und Denkprozeß des Kindes, 2. Auflage, Düsseldorf: Schwann.

Radatz, Hendrik (1980): Fehleranalysen im Mathematikunterricht, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Scherer, Petra (1995): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte – Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung. 2. Auflage, Heidelberg: Winter.

Scherer, Petra (1996): Evaluation entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte: Quantitative oder qualitative Forschungsmethoden? In: Heilpädagogische Forschung, 22 (1996) 2, S. 76–88.

Scherer, Petra (1999): Mathematiklernen bei Kindern mit Lernschwächen. Perspektiven für die Lehrerbildung. In: Selter, Christoph (Hrsg.)/Walther, Gerd (Hrsg.) (1999): Mathematikdidaktik als design science, Leipzig u. a.: Klett-Grundschulverlag, S. 170–179.

SchulG – Schulgesetz für das Land Nordrhein-Westfalen vom 15. Februar 2005, zuletzt geändert durch Artikel 2 des Gesetzes vom 14. Februar 2012.

Schulministerium – Ministerium für Schule und Weiterbildung, Wissenschaft und Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (1999): Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Frechen: Ritterbach.

Schulministerium – Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2004): Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Frechen: Ritterbach.

Schulministerium – Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2007): Kernlehrplan für das Gymnasium – Sekundarstufe II (G8) in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Frechen: Ritterbach.

Selter, Christoph/Spiegel, Hartmut (1997): Wie Kinder rechnen. Leipzig u. a.: Klett-Grundschulverlag.

Sjuts, Johann (2008): Aufgaben diagnostisch gestalten. Denkprozesse aufdecken und Verstehen fördern. In: mathematik lehren, (2008) 150, Seelze: Friedrich, S. 58–61.

Vollrath, Hans-Joachim (1994): Algebra in der Sekundarstufe, Mannheim u. a.: B. I. Wissenschaftsverlag.

Vollrath, Hans-Joachim (2001): Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe, Heidelberg u. a.: Spektrum.

Wagemann, Elmar-Bussen (1988): Bausteine zu einer Methodik des Mathematikunterrichts, Gießen: Justus-Liebig-Universität, Institut für Didaktik der Mathematik

Wartha, Sebastian (2009): Rechenstörungen in der Sekundarstufe: Die Bedeutung des Übergangs von der Grundschule zur weiterführenden Schule. In: Heinze, Aiso/Grüßing, Meike (Hrsg.): Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium, S. 157–180.

Wartha, Sebastian/Rottmann, Thomas/Schipper, Wilhelm (2008): Wenn Üben einfach nicht hilft. Prozessorientierte Diagnostik verschleppter Probleme aus der Grundschule. In: mathematik lehren, (2008) 150, Seelze: Friedrich, S. 20–25.

Wenke, Karten (o. J.): Rätsel-Sammlung 3. URL: http://www.deecee.de/funny-stuff/raetsel/raetsel-sammlung-3.html [aufgerufen am 19.09.2012].

WE OS – Wissenschaftliche Einrichtung Oberstufen-Kolleg (Hrsg.) (2010): Forschungs- und Entwicklungsplan 2010–2012. URL: http://www.uni-bielefeld.de/OSK/NEOS_WissEinrichtung/Projekte/FEP2010-2012.pdf [aufgerufen am 02.08.2011]

Winter, Heinrich (1985): Die Gauss-Aufgabe als Mittelwertaufgabe. In: mathematik lehren, (1995) 8, Seelze: Friedrich, S. 20–24.

Anhang

Leitfaden

Einleitung

- gegenseitige Vorstellung und Vorstellung des Themas: Wie lösen Schüler/innen Gleichungen und welche Ursachen haben Schwierigkeiten, die sie dabei haben? Vorab schonmal vielen Dank.
- Das Interview dauert 20 bis 30 Minuten und es wird aufgenommen. Der Ton wird aber nicht weitergegeben, sondern ich tipp das dann ab, und ich schreib auch deinen Namen nicht in die Arbeit. Also ist alles anonym.
- Es sollen einige Aufgaben gelöst werden. Dabei bekommst du keine Tipps, aber natürlich kannst du nachfragen, wenn dir nicht klar ist, was mit der Aufgabenstellung überhaupt gemeint ist.
- Dazu hast du das Papier zur Verfügung, aber damit ich den Lösungsweg genauer verstehe, bitte ich dich auch, all deine Gedanken zu der Aufgabe laut auszusprechen. Alles was dir dazu durch den Kopf geht, jede noch so kleine Idee. Ok? Es ist nicht schlimm, wenn etwas nicht richtig ist.
- Hast du noch Fragen vorab? Sonst beginnen wir mit der ersten Aufgabe.

Standardaufforderungen

- Hier ist die (erste/nächste/letzte) Aufgabe. Lies sie bitte laut vor und versuche, die Aufgabe zu lösen.
- Du kannst die gerne Notizen auf dem Papier machen.
- Worüber denkst du gerade nach?
- Kannst du den letzten Schritt begründen?

Fragen bei Problemen

- Hast du noch Fragen zur Aufgabe?
- Lies dir die Aufgabenstellung noch einmal in Ruhe durch.

Fragen zu Lernstrategien und zum Lernprozess

- Könnte man die Aufgabe auch auf eine andere Weise lösen?
- Löst du solche Aufgaben immer so?
- Funktioniert dieser Lösungsweg immer?
- Wie würdest du das jemandem erklären, der das noch nie gemacht hat?

Sondierungsfragen

- Wie kommst du auf diesen Schritt? [ggf. auf entsprechende Stelle in der Notiz zeigen]
- Warum hast du das so gemacht? [ggf. auf entsprechende Stelle in der Notiz zeigen]
- Kannst du mir den Schritt nochmal erklären?
- Kannst du das genauer begründen?
- Kannst du das auch anders begründen?

Abschluss des Gesprächs

- E-Mail-Adresse für Förderung

Transkripte der Interviews, Mitschriften und Förderaufgaben

Im Nachfolgenden sind die Interviews mit den KollegiatInnen, sowie die vollständigen Mitschriften der Aufgabenlösungen abgedruckt. Die Reihenfolge der Transkripte entspricht der Reihenfolge, in der die Interviews durchgeführt wurden:

Die Aussagen, die mit „S:" beschriftet sind, sind die Aussagen der Kollegiatin bzw. des Kollegiaten. Die Aussagen, die mit „I:" beschriftet sind, stammen vom Interviewer. Die Zeilen, die weder mit „S:" noch mit „I:" markiert sind, enthalten die Notizen, die an dieser Stelle auf den Aufgabenzettel geschrieben worden sind.

Adrian

Aufgabe 1

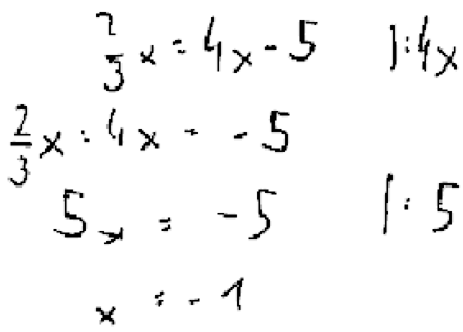


Abbildung 1: Adrians Mitschrift zu Aufgabe 1

1	I:	[Einleitung]
2	S:	Okay. [Liest Aufgabenstellung vor]. Ähm ich schreib das einfach mal nochmal ab.
3		$\frac{2}{3}x=4x-5$
4	S:	Okay ähm. Ich würd's erst durch 4x teilen. Um die x auf eine Seite zu kriegen.
5		$\vert :4x$
6	S:	Aber da geht's schon los. Ich hab voll das Problem mit Brüchen. Ich find Dezimalzahlen um einiges einfacher. Ich schreib das erstmal so auf.
7		$\frac{2}{3}x:4x=-5$
8	S:	Ähm. [flüstert:] Zwei Drittel durch vier. Man muss durch den Teiler teilen, ne? Durch vier?
9	I:	Ich sag dir nichts dazu.
10	S:	Ich find Brüche wahnsinnig unheimlich schwierig. Damit haben aber viele das Problem.
11	I:	Mhm.
12	S:	Wir rechnen in unserem Mathekurs nur mir Dezimalzahlen.
13	I:	Mhm.
14	S:	Kann man nicht auch mit dem Kehrwert malnehmen oder war das was anderes? [Pause] Ja auf jeden Fall ist dann der nächste Schritt dann gleich [Pause] Aber echt doof ohne Taschenrechner [Pause]
15	I:	Was würdest du denn in den Taschenrechner eingeben?
16	S:	Zwei Drittel durch vier.
17	I:	Okay, nehmen wir mal an, du hast 'ne Zahl rausgekriegt. denk dir mal irgendeine Zahl aus und dann kannst du damit weiterrechnen.
18	S:	Okay. Das macht's natürlich einfacher. Ich schreib einfach mal fünf.
19		$5x = -5$
20	S:	Durch fünf.
21		$\vert :5$ $x = -1$
22	I:	Okay, das ist jetzt deine Lösung.

23	S:	Ja.
24	I:	x gleich minus eins. Okay. Kannst du mir den ersten Schritt nochmal erklären, was du da gemacht hast?
25	S:	Erstmal die x alle auf eine Seite gebracht. Ähm. Dann ja gut, das ist natürlich jetzt ausführlich aufgeschrieben, normalerweise würde da schon das Ausgerechnete stehen: zwei Drittel x durch 4x. Das bleibt auf dieser Seite hier. Natürlich. Und damit man das x dann wieder alleine stehen hat, dann wieder durch 5 bzw. die Lösung, die hier rauskommt.
26	I:	Okay. Wieso hast du durch 4x geteilt, warum z.B. nicht mal 4x oder minus 4x oder plus 5 oder was auch immer?
27	S:	Stimmt, das war blöd, ne? Ich hätte plus 4x.
28	I:	Das heißt, ähm, wenn ich nachfrage, heißt das nicht, dass es falsch ist. Mich interessiert nur, was dein Gedankengang war.
29	S:	Ähm. Ich hab 4x ganz intuitiv gemacht um ehrlich zu sein. Aber eigentlich steht hier 4x *minus* 5, deswegen hätte es wahrscheinlich mehr Sinn gemacht. Nee.. Wenn ich [unverständlich] Hätte da minus 4x hin gemusst, weil, da muss ja im Grunde Null rauskommen mit der Null rauskommen mit der...
30	I:	Mhm und wie kamst du dann auf durch 4x?
31	S:	Weil ich irgendwie intuitiv davon ausgegangen bin, dass hier ein Mal ist. Also das ist für mich immer die plausibelste Rechenanweisung das mit durch.
32	I:	Okay. Alles klar, ich glaub', dann war es das schon für die erste Aufgabe, dann können wir weitermachen mit der zweiten. Okay. Lies sie bitte nochmal laut vor.

Aufgabe 2

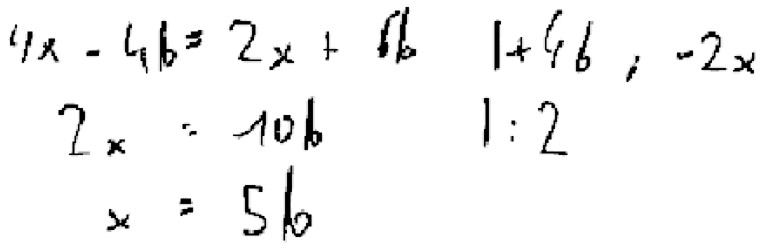


Abbildung 2: Adrians Mitschrift zu Aufgabe 2

33	S:	[Liest Aufgabe 2 vor]
34	I:	Genau. Und die Aufgabe ist, nach x aufzulösen.
35	S:	Okay.
36		4x – 4b = 2x + 6b
37	S:	Binomische Formel ist immer blöd.
38		| +4b ; –2x
39	I:	Was ist das Zeichen da zwischen den beiden?
40	S:	Äh einfach...
41	I:	Ein Semikolon?
42	S:	Ein Semikolon, ja genau.
43	I:	Okay. Sagst du nochmal bitte dann laut dabei, worüber du nachdenkst.
44	S:	Äh, erstmal alle x auf eine Seite zu bringen und alle b auf eine Seite zu bringen.
45	I:	Okay.
46	S:	Damit das voneinander getrennt ist.

47		2x=10b
48	S:	Damit das x dann alleine steht durch 2 rechnen.
49		|: 2
50	S:	Und das wären dann
51		x=5b
52	I:	Okay. Zum ersten Schritt nochmal, wieso jetzt plus 4b, warum nicht minus 4b, warum minus 2x warum nicht plus oder durch?
53	S:	Weil hier steht ja minus 4b, und damit das aufgehoben wird, damit null rauskommt, muss natürlich plus 4b. und das gleiche mit dem 2x dann.
54	I:	Gut, danke schön. Dann die nächste Aufgabe.
55	S:	Okay.
56	I:	Nochmal laut vorlesen bitte.

Aufgabe 3

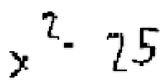


Abbildung 3: Adrians Mitschrift zu Aufgabe 3

57	S:	[Liest Aufgabe 3 vor]. Hm. Ich würde sagen, x Quadrat minus 25.
58		$x^2 - 25$
59	I:	Okay. Kannst du das begründen?
60	S:	Naja, x zum Quadrat wegen dem hoch zwei halt und, ähm, 5 zum Quadrat ist 25. Und beides quadriert, weil die hoch zwei steht ja außerhalb der Klammer und nicht über einer bestimmten Zahl.
61	I:	Okay. Rechnest du solche Aufgaben immer so?
62	S:	Ja
63	I:	Okay. Alles klar. Ja dann. Die war ja kurz. Dann machen wir einfach die nächste. Jetzt kommen Textaufgaben
64	S:	Okay.
65	I:	Bitte nochmal laut vorlesen.

Aufgabe 4

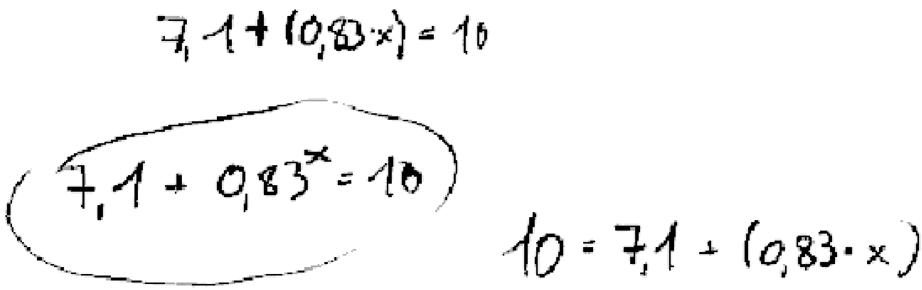


Abbildung 4: Adrians Mitschrift zu Aufgabe 4

66	S:	[Liest Aufgabe 4 vor]
67	I:	Klar was gemeint ist?

68	S:	Mhm.
69	I:	Okay. Also, du brauchst die Gleichung nicht zu lösen, sondern nur aufzustellen.
70	S:	Aha okay... hm..
71		7,1 =
72	I:	Sagst du bitte dabei, was du denkst?
73	S:	Ja, also mein Ausgangspunkt sind erstmal die 7,1 Milliarden. Die kommen auf die eine Seite. Und, äh, auf die andere kommt schonmal das 10 Milliarden, weil das ja der Endwert sein muss
74	I:	Mhm.
75		10
76	S:	Sprich die Lösung. Und jetzt guck ich noch, womit ich multiplizieren kann, um das auszurechnen. [Pause] Nee, womit ich.. addieren kann.. [Pause]
77		$+(0{,}83 \cdot x)$
78	S:	Genau überlegen. Ähm. Also wir hatten in letzter Zeit geometrische Formen zum Beispiel, bzw. Gleichungen.
79	I:	Was sind geometrische Gleichungen?
80	S:	Ähm, wo man auch so Wachstum bestimmen kann. Geometrische und arithmetrische waren das, meine ich. Ja. Ähm. Wie ist nochmal? Aber das ist erstmal so das erste, was ich mir in den Sinn gekommen wäre. Also wir haben die 7,1 Milliarden. Und dann mal wie viel? Ah das kann natürlich auch sein, dass das mit hoch x ist... Plus.
81		$7{,}1+0{,}83^{x} = 10$
82	S:	Hoch wie viele Jahre gleich zehn.
83	I:	Was würde für das eine sprechen und was würde für das andere sprechen?
84	S:	Das war das wie wir's immer im Matheunterricht gerechnet haben mit dem geometrischen und dem arithmetischen. Aber das [das obere] ist, äh, ist für mich persönlich irgendwie leichter nachzuvollziehen
85	I:	Mhm. Wie würdest du es begründen?
86	S:	Weil ich immer schon so ein Problem mit.. mit Hochzahlen habe. Gerade hier dann daran das x auszurechnen mit Logarithmus oder so.
87	I:	Okay, also du würdest jetzt die erste Gleichung bevorzugen weil die einfacher zu rechnen ist?
88	S:	Ja.
89	I:	Und was meinst du, was ist richtiger?
90	S:	Ich glaube das hier [das untere] ist richtiger.
91	I:	Warum?
92	S:	Weil das alles, ähm, mehr Sinn macht. Aber. Macht das wirklich mehr Sinn? Ja das ist. Es kommen ja jedes Jahr 83 Millionen mehr dazu, das heißt, man kann das nicht so [oben] rechnen, weil dann, ähm, dann wär' dieser stetige Wachstum nicht dabei, sondern nur so ein einmaliger Wachstum. Ähm. Verstehst du, was ich meine?
93	I:	Nee. Kannst du das nochmal genauer sagen?
94	S:	Also mit der Gleichung hier, ähm. Wenn jetzt zum Beispiel fünf rauskommen würde, also in fünf Jahren hätten wir zehn Milliarden. Dann wäre aber zwischen diesen Jahren, zum Beispiel nach dem ersten Jahr, kommen ja nochmal 83 Millionen dazu, und, äh, nach dem zweiten Jahr nochmal 83 Millionen. Aber man muss das Jahr aufeinander rechnen, und nicht nur pro Jahr 83 Millionen, sondern die die ja vorher noch dazu gekommen sind mitnehmen quasi.
95	I:	Okay.

96	S:	Und ich glaube, das funktioniert hiermit nicht. Aber das könnte hiermit funktionieren. Vielleicht nicht. Also wenn wir sowas im Matheunterricht machen und wir das an einem Tag durchnehmen, dann macht das immer Sinn für mich und wenn ich dann am nächsten Tag in den Unterricht komme, dann geht das auch noch. Und sollte ich 'ne Woche später die Aufgabe rechnen, dann ist es wieder extrem schwer. Sowas über einen längeren Zeitraum im Kopf zu behalten. Wenn man es dann sieht, wie es wirklich gerechnet wird, dann macht's auf jeden Fall Sinn. Aber das selber aufzustellen finde ich immer sehr schwer.
97	I:	Okay.
98	S:	Ich würd' sagen, es ist diese hier. Aber ich bin mir nicht sicher
99	I:	Könnte es vielleicht noch ganz anders aussehen?
100	S:	Mit Sicherheit, aber ich denke mal die richtige Formel sieht auf jeden Fall ganz anders aus. Ähm. [unverständlich] Ich bin mir wirklich nicht sicher.
101	I:	Okay. Und wenn du versuchst, dich vom Unterricht zu lösen und einfach nachzudenken, was vielleicht logisch wär' oder wenn du aus, wenn du den Text nochmal liest?
102	S:	[Liest] [Pause]
103		$10 = 7{,}1 + (0{,}83x)$
104	S:	So macht's für mich nach wie vor am meisten Sinn eigentlich. Obwohl dann da wieder das Problem ist was ich eben meinte mit dem Draufrechnen.
105	I:	Was heißt denn jetzt .. Was heißt jetzt am meisten Sinn? Das heißt am besten zu rechnen oder auch am logischsten?
106	S:	Ähm, am logischsten auf den Text zu geschnitten, finde ich.
107	I:	Okay. Aber vom Unterricht her meinst du würde besser das Linke passen?
108	S:	Mhm.
109	I:	Okay. Alles klar. Dann nehmen wir die nächste Aufgabe.
110	S:	Okay.
111	I:	Lies sie nochmal laut vor

Aufgabe 5

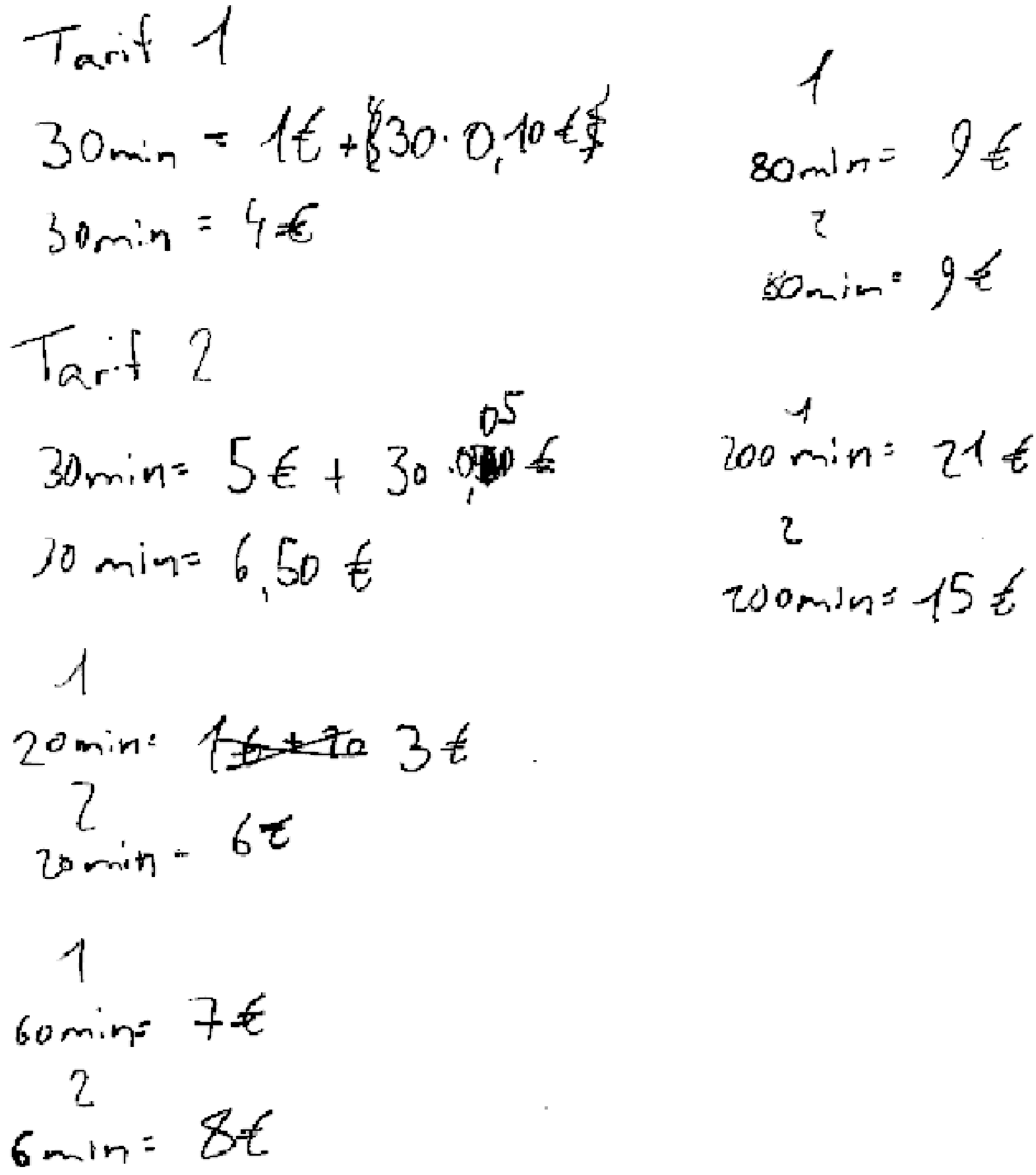

Tarif 1
30min = 1€ + (30 · 0,10 €)
30min = 4 €
Tarif 2
30min = 5 € + 30 · 0,05 €
30 min = 6,50 €
1
20min = ~~1€ + 10~~ 3 €
2
20min = 6 €
1
60min = 7 €
2
6min = 8 €
1
80min = 9 €
2
80min = 9 €
1
200 min = 21 €
2
200min = 15 €

Abbildung 5: Adrians Mitschrift zu Aufgabe 5

112	S:	[Liest Aufgabe 5 vor] [Pause]
113	I:	Sagst du wieder bitte, was dir durch den Kopf geht.
114	S:	Ähm, ich muss mich erstmal sortieren nochmal was die Frage ist. [Pause] Für welche monatliche Gesprächsdauer. [Pause] Okay. Das heißt, wenn ich weniger telefoniere ist der eine besser für mich und wenn ich mehr telefoniere ist der andere besser für mich. [Pause] Hm. Das ist aber eine ziemlich wage aufgestellte Frage, oder? Sagen wir mal ich telefoniere 30 Minuten [Pause] im Monat. Dann zahle ich bei Tarif 1 einmal die Grundgebühr von einem Euro
115		Tarif 1 30min = 1 €

116	S:	plus 30 mal. Null Komma.
117		30 ·0,10€
118	S:	für 30 Minuten würde ich dann bezahlen... 4 Euro
119		30min=4€
120	S:	Und bei Tarif 2
121		Tarif 2
122	S:	Mit der gleichen Minutenanzahl
123		30min=
124	S:	Da ist die Grundgebühr von 5 Euro
125		5€
126	S:	Plus. [unverständlich, vermutlich:] wie viel waren das nochmal?
127		*umklammert oben:* 30 ·0,10€
128	S:	Nee, ist gut, ist ja sowieso Punkt vor Strich.
129		*Streicht die Klammern wieder durch.*
130	S:	Plus 30 mal.
131		+30 ·0,50€
132		[Kurze Unterbrechung durch Nebengespräch mit anderem Schüler, der an den Tisch kommt]
133	S:	Okay, und da kostet's dann bei 30 Minuten... [flüstert:] Sechs fünfzig
134		30min=6,50€
135		Sprich, wenn ich... äh, ja der hier ist auf jeden Fall, Tarif 1 ist auf jeden Fall billiger, wenn ich wenig telefoniere wegen der Grundgebühr, weil die halt niedriger ist. Und Tarif 2 ist ähm billiger oder besser, wenn ich mehr telefoniere.
136	I:	Mhm.
137	S:	Weil da der Minutenpreis deutlich geringer ist.
138	I:	Und die Aufgabe ist ja so gemeint, du sollst rausfinden für, also *alle* Gesprächsdauern, bei denen der erste günstiger und *alle* Gesprächsdauern, bei denen der zweite günstiger ist.
139	S:	Das heißt, wo die sich quasi in der Mitte treffen die beiden?
140	I:	Wenn du meinst, dass äh ja. Also die treffen sich irgendwo sagst du, bei einer Dauer.
141	S:	Ja, ich würd' mal so sagen 20 Minuten vielleicht.
142	I:	Mhm. Wie würdest du das jetzt ausrechnen?
143	S:	[lacht] Ich würde den simpelsten Weg nehmen, ich würde einfach rumprobieren.
144	I:	Okay.
145	S:	Bis ich irgendwas gefunden habe, das passt.
146	I:	Ja, dann mach das doch mal. Oder wenn du, also du kannst gerne rumprobieren, du kannst auch natürlich noch was anderes überlegen.
147	S:	Okay. Ja es gibt bestimmt um einiges einfachere Wege, aber ich find' sowas immer simpler und besser nachzuvollziehen. Also bei 20 sind es ein Euro, sind 3 Euro.
148		1 30 min = 1 € + 20 *Streicht die rechte Seite wieder durch und schreibt:* 3 €
149	S:	Kann ich auch im Grunde im Kopf gerade machen. Ist das okay oder muss ich die ganzen Rechenwege..?

150	I:	Ja klar, du kannst das auch im Kopf machen.
151	S:	Okay. Das sind hier 3 Euro. [unverständlich] Ok.
152		2 20 min =
153	I:	Was geht dir gerade durch den Kopf?
154	S:	Ich steh gerade irgendwie auf dem Schlauch, ich hab hier was falsch aufgeschrieben, deswegen.
155		*Streicht oben 50 durch und schreibt 05.*
156	S:	So, das wären ja 50 Cent gewesen. Jetzt muss ich gerade nochmal gucken, ob ich das hier richtig gerechnet hab. Ähm. Ja okay, das war wohl richtig.
157		6 €
158	S:	Also hier ist immer noch der deutlich billiger. Ähm. Nee, ist ja Schwachsinn, die müssen sich ja viel eher, äh viel später treffen, bei 'ner höheren Minutenzahl. Weil hier [Tarif 1 bei 20 Minuten] sind's immer nur noch drei Euro und hier ist ja allein die Grundgebühr schon fünf Euro [Tarif 2]. Das heißt, es muss auf jeden Fall auch über 30 Minuten liegen. Ich mach das einfach mal jetzt mit einer Stunde.
159		1 60 min = 7 € 2 6 min = 8 €
160	S:	8 Euro. Okay, also machen wir es ... Ist falsch?
161	I:	Nein, nein, ich dachte nur, ob ich dich was frage, aber dann dachte ich, ich lass dich besser einfach machen.
162		1 80 min = 9 € 2 80 min = 9 €
163	S:	Ja okay, bei 80 Minuten,
164	I:	Bei 80 Minuten. Kann es jetzt sein, dass es irgendwann... Also das heißt, wann ist welcher Tarif der günstigere?
165	S:	Ähm, wenn man unter 80 Minuten telefoniert der erste und wenn man über 80 Minuten im Monat telefoniert der zweite.
166	I:	Ok. Kann das jetzt vielleicht passieren, dass das irgendwann bei ganz vielen Minuten wieder andersrum ist?
167	S:	Nee, würde ich nicht sagen. Weil der Minutenpreis ist ja hier [Tarif 2] nur die Hälfte von dem Preis [Tarif 1].
168	I:	Und das heißt?
169	S:	Dass man, umso mehr telefoniert, desto mehr Geld spart man hier. Und desto mehr gibt man hier halt aus. Selbst wenn, wenn die Grundgebühr hier vier Euro billiger ist. Also ich kann spaßeshalber einmal ausrechnen, aber ich glaube, das nimmt sich nichts. Beziehungsweise der ist billiger.
170	I:	Wie würdest du es denn ausrechnen?
171	S:	Ja jetzt einfach mal einen hohen Betrag nehmen und 200 Minuten ausrechnen. Da sieht man das ja.
172		1 200 min = 21 € 2 200 min = 15 €

173	S:	Ja, da ist immer noch der zweite billiger.
174	I:	Okay, dann die letzte Aufgabe. Wieder bitte laut vorlesen und dann anfangen.

Aufgabe 6

Abbildung 6: Adrians Mitschrift zu Aufgabe 6

175	S:	[liest die Aufgabe 6 vor].
176		f(x)=
177	I:	Sagst du bitte wieder deine Idee?
178	S:	Also erstmal f von x also das Grundgerüst quasi. Und dann ... [unverständlich] wahnsinnig schwer. Ich fand Graphen zeichnen und verstehen ist kein Problem, aber die Gleichung darauf aufzutragen und direkt zu sehen bei der und der Gleichung, dass der Graph so verlauft, finde ich immer ziemlich schwer das alles abzulesen. Ähm. Ich weiß es ehrlich gesagt jetzt echt nicht.
179	I:	Was müssen deine Funktionen erfüllen?
180	S:	Sie müssen sich in dem Punkt zwei drei schneiden. [unverständlich] Aber ich weiß nicht, wie man die aufstellt.
181	I:	Okay, versuch mal einfach Geraden zu nehmen, die da durchgehen.
182	S:	Einfach so eine hier?
183		*zeichnet Gerade in den Graphen ein*
184	I:	Zum Beispiel und dann dafür eine Funktion zu finden.
185	S:	[Pause] Ich weiß nicht, ob das Blödsinn ist.
186		$f(x) = x^2$
187	S:	f von x gleich x quadrat.
188	I:	Wie könntest du das überprüfen? Oder wie bist du darauf gekommen?
189	S:	Das kommt mir noch so bekannt vor. Ähm, also f von x ist ja im Grund y. Und wenn man das ist ein Koordinatensystem einträgt, dann ähm.. Geht nur x im Grund nicht auch? Aber dann haben wir wenn y gleich 1 ist und x gleich 1 ist.
190		$f_2(x) = x$
191	S:	Dann ist das ja immer so. Zack zack und zack zack.
192		*zeichnet Graph*
193	S:	Und zwei drei, vor zwei drei kommt ähm. Warte mal, das funktioniert nicht. Quatsch.

		Man müsste das einen höher ansetzen. [unverständlich] Einen höher. Ich glaub, hier geht's los. [unverständlich] zwei x.
194		2 [vor das x]
195	S:	Hm. Ich weiß es nicht. Ähm. [Pause]. Keine Ahnung, ich finde das extrem schwer, Graphen so aufzustellen.
196	I:	Okay. Ähm, ja dann würde ich sagen, dann war's das.
197	S:	Ok.
198	I:	Ja, oder hast du noch irgendeine Idee? Ist dir noch eine Idee durch den Kopf gegangen, aber wusstest nicht, wie du sie umsetzen könntest?
199	S:	Ja genau, man kann noch x plus oder halt x minus irgendwas. Aber ich kann mir das bildlich so schwer vorstellen.
200	I:	Ok.
201	S:	Welche Auswirkungen das hat.
202	I:	[Abschluss des Gesprächs]

Förderung

In manchen Situationen wird der Wert einer Zahl (die oftmals x genannt wird, aber sie kann natürlich auch anders heißen) gesucht, die eine bestimmte Bedingung oder manchmal auch mehrere Bedingungen erfüllt. Beispiel:

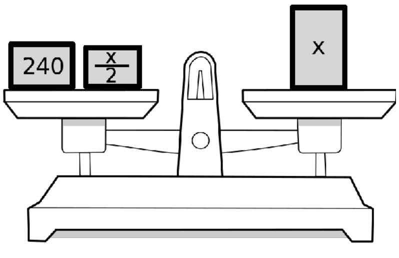
Eine Bahncard 50 kostet 240 Euro (pro Jahr). Wer so eine Karte hat, zahlt nur den halben Fahrpreis. Wie viel müsste man im Jahr für Bahnfahrten bezahlen, damit man mit einer Bahncard die gleichen Kosten hat wie ohne? Die Frage ist berechtigt, denn ab diesen Kosten lohnt sich die Bahncard im Vergleich zum Normalpreis.

Es ist also eine ganz bestimmte Zahl gesucht, deren Wert zwar eindeutig – es gibt nur eine einzige Antwort auf die Frage – aber unbekannt ist. Die Bedingung an diese Zahl ist, dass bei diesem Fahrtpreis das Bahnfahren ohne Bahncard genauso hoch ist wie mit Bahncard.

Die Zahl kann man zum Beispiel durch Ausprobieren herausfinden. Eine Berechnung führt aber oft schneller zum Ziel. Und außerdem würde sich eine Berechnung auch an geänderte Bedingungen anpassen lassen.Wenn zum Beispiel der Preis für die Bahncard erhöht wird, müsste man bei der Ausprobier-Methode von vorne anfangen.

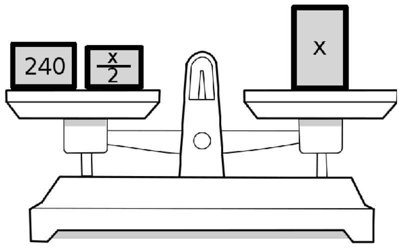
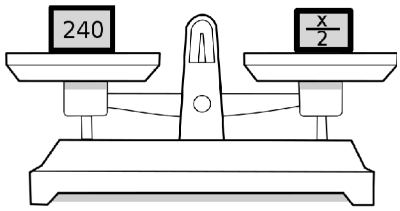
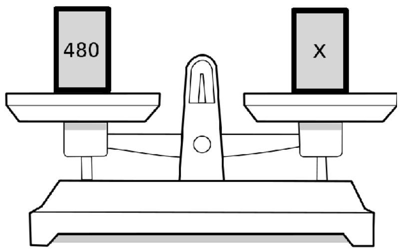
Die Bedingung ist bis jetzt umgangssprachlich formuliert. Für die Rechnung ist es sinnvoll, sie mathematisch zu formulieren. Oft können Bedingungen als Gleichung formuliert werden. In diesem Fall: $240+\frac{x}{2}=x$

Auf der linken Seite stehen die Kosten, die man hätte, wenn man eine Bahncard hat: Der Preis der Bahncard und die halben Fahrtkosten. Auf der rechten Seite stehen die Kosten, die man ohne Bahncard hätte. Gesucht ist die Zahl x, für die die Gleichung erfüllt ist. Links und rechts steht also der gleiche Wert. Man kann sich die Gleichung vorstellen wie eine Waage im Gleichgewicht:



Wenn nun auf beiden Waagschalen das Gleiche durchgeführt wird, ändert sich nichts an der Gleichheit: Wenn auf beiden Seiten zum Beispiel der Wert „100" dazu kommt oder abgezogen wird, ist die Waage immer noch im Gleichgewicht. Das gilt natürlich auch für den Wert von x, obwohl er noch unbekannt ist. Wenn auf beiden Seiten „x" dazu kommt, bleibt die Waage im Gleichgewicht. Ebenso bleibt die Waage im Gleichgewicht, wenn man beide Seiten verdoppelt oder verdreifacht oder halbiert. Genauso ist es bei der Gleichung: Wenn links und rechts das gleiche gemacht wird, hat man eine neue Gleichung. Es steht wieder links und rechts der gleiche Wert. Man sagt, die erste Gleichung wurde *umgeformt*. Man versucht, die Gleichung so umzuformen, dass auf einer Seite nur noch „x" steht, denn dann steht auf der anderen Seite der Wert.

Für die Bahncard-Aufgabe zum Beispiel so:

Gleichung	Waage
$240+\frac{x}{2}=x$	
Auf beiden Seiten $\frac{x}{2}$ abziehen	
$240=\frac{x}{2}$	
beide Seiten verdoppeln	
$480=x$	

Die Bahncard lohnt sich also, wenn man im Jahr mindestens 480 Euro für Bahnfahrten ausgibt.

Aufgaben:

1. Lies den obigen Text. Kannst du alles nachvollziehen? Versuche, offene Fragen zu klären.
2. Beschreibe noch einmal mit eigenen Worten, warum auf den beiden Seiten einer Gleichung dasselbe gemacht werden muss, um die Gleichung zu lösen.
3. Die Bahncard 25 kostet 59 Euro. Wer so eine Karte hat, zahlt nur ¾ des Normalpreises. Bestimme, wie viel man im Jahr mindestens für das Bahnfahren ausgeben müsste, damit sich eine Bahncard 25 im Vergleich zum Normalpreis lohnt.
4. Eine Kerze ist 10cm hoch und brennt pro Stunde um 7mm ab. Wie lange dauert es, bis sie nur noch 3cm hoch ist?

Lösungen:

$$\begin{aligned} 59+\frac{3}{4}x &= x & &\Big|-\frac{3}{4}x \\ 59 &= \frac{1}{4}x & &|\cdot 4 \\ 436 &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10-0{,}7\cdot x &= 3 & &|+0{,}7\,x \\ 10 &= 3+0{,}7\,x & &|-3 \\ 7 &= 0{,}7\,x & &|:0{,}7 \\ 10 &= x \end{aligned}$$

Bianca

Aufgabe 1

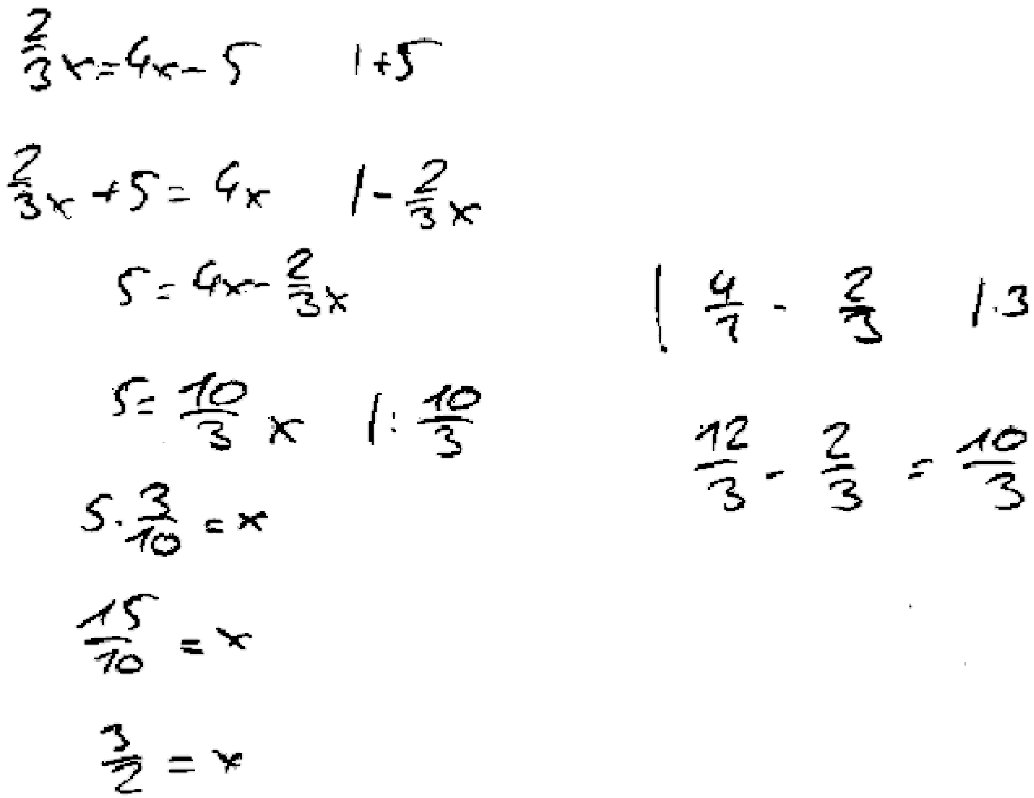


Abbildung 7: Biancas Mitschrift zu Aufgabe 1

1	I:	[Einleitung]
2	S:	[Liest Aufgabe 1 vor.] Also wir haben die Gleichung zwei drittel x minus vier x äh gleich vier x minus fünf.
3		$\frac{2}{3}x = 4x - 5$
4	S:	Bring ich erstmal die fünf auf die andere Seite, plus fünf.
5		$\mid +5$
6	S:	Dann haben wir zwei drittel x plus fünf gleich vier x.
7		$\frac{2}{3}x + 5 = 4x$
8	S:	Weil ich das x auch noch auf die andere Seite muss, rechne ich minus zwei Drittel x.
9		$\mid -\frac{2}{3}x$
10	S:	Dann haben wir fünf gleich vier x minus zwei drittel x. So wenn man jetzt wüsste, was vier minus zwei drittel ist. Darf ich einen Taschenrechner benutzen?
11	I:	Nee.
12	S:	Ach, schade. Hmm. Dann haben wir vier Eintel minus zwei Drittel.

13		$\frac{4}{1}-\frac{2}{3}$
14	S:	Rechnen wir den mal drei.
15		$\mid \cdot 3$
16	S:	Haben wir zwölf Drittel minus zwei Drittel.
17		$\frac{12}{3}-\frac{2}{3}$
18	S:	Gleich zehn Drittel
19		$=\frac{10}{3}$
20	S:	Fünf gleich zehn Drittel x.
21		$5=\frac{10}{3}x$
22	S:	Und dann rechnen wir geteilt durch zehn Drittel.
23		$\mid :\frac{10}{3}$
24	S:	Sind fünf mal drei Zehntel wegen Multiplizieren mit 'nem Kehrbruch, gleich x.
25		$5\cdot\frac{3}{10}=x$
26	S:	Und dann haben wir fünfzehn Zehntel gleich x.
27		$\frac{15}{10}=x$
28	S:	Und das sind drei Halbe.
29		$\frac{3}{2}=x$
30	S:	x ist gleich drei Halbe.
31	I:	Alles klar. Ja danke. Dann kannste die nächste.

Aufgabe 2

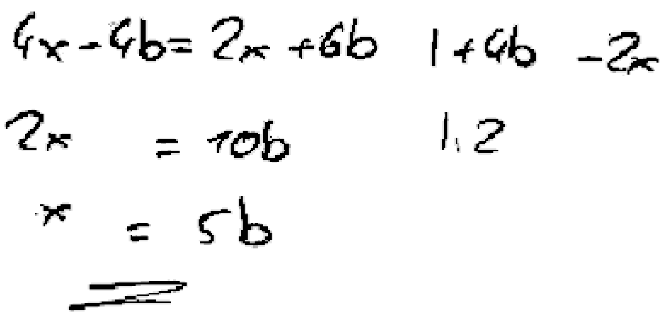


Abbildung 8: Biancas Mitschrift zu Aufgabe 2

32	S:	[Liest Aufgabe 2 vor.]
33	S:	Lösen wir erstmal die Klammern auf. Haben wir 4x minus 4b gleich 2x plus 6b.
34		4x-4b=2x+6b
35	S:	Und dann rechnen wir plus 4b und minus 2x.
36		| + 4b-2x

37	S:	Und dann haben wir 2x gleich, ähm, 10b. Und das geteilt durch 2.
38		$2x = 10b \mid :2$
39	S:	Dann haben wir x gleich 5 b.
40	I:	Ok. Das ging ja schnell.

Aufgabe 3

$$x^2 - 2x \cdot 5 + 5^2$$

$$x^2 - 10x + 25$$

Abbildung 9: Biancas Mitschrift zu Aufgabe 3

41	S:	[Liest Aufgabe 3 vor]. Ist 'ne binomische Formel, die zweite. Dann haben wir x Quadrat minus 2x mal fünf. Multiplizier ich gleich aus. Plus fünf hoch zwei.
42		$x^2 - 2x \cdot 5 + 5^2$
43	S:	Haben wir x hoch 2 minus 10x plus 25.
44		$x^2 - 10x + 25$
45	I:	Okay.

Aufgabe 4

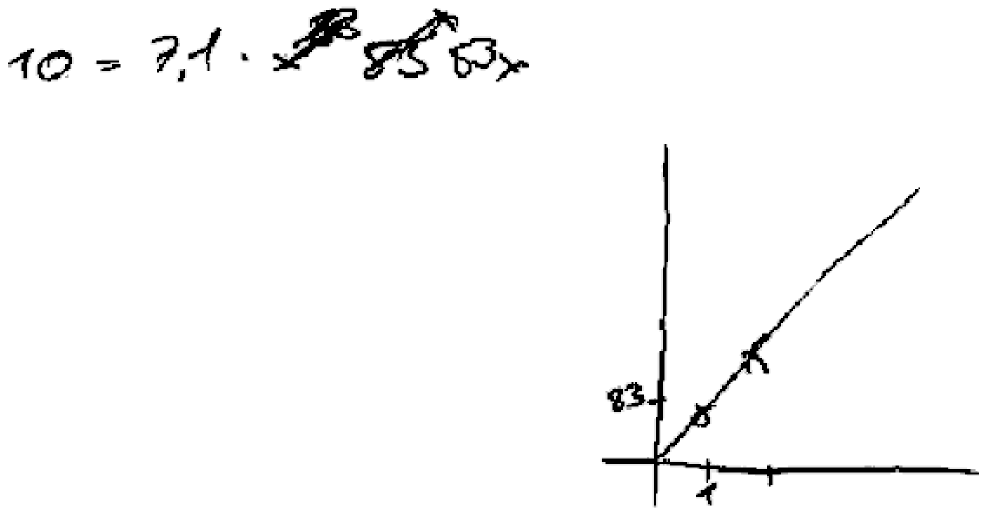


Abbildung 10: Biancas Mitschrift zu Aufgabe 4

46	S:	[Liest Aufgabe 4 vor]. Zehn Milliarden wollen wir haben, wir haben 7,1 Milliarden mal.. Hm.
47		$10 = 7{,}1\ \cdot$
48		Jedes Jahr werden es 83 mehr. Haben wir x hoch 83.
49		x^{83}

50		Oder andersum?
51		*Streicht das soeben geschriebene wieder durch und schreibt:* 83^x
52		Ein Jahr hoch 83. Hm. [Pause]
53	I:	Spricht du laut aus, was du dabei denkst?
54	S:	Okay, ähm, also x hoch 83 dürfte falsch sein, denn wenn ich das rechne, habe ich.. Ähm, wenn man das auflösen würde, hätte ich nach zwei Jahren zwei mal zwei und das 83 mal. Das ist äh falsch berechnet, deswegen muss man 83 hoch x. Für x setzt man dann die Anzahl der Jahre ein, die man haben möchte, und so kann man das ausrechnen. Soll ich das noch auflösen?
55	I:	Nee, brauchste nicht aufzulösen. Okay. Warum muss das 83 hoch x sein, warum nicht durch x oder plus x oder...?
56	S:	Ähm, das ist eine Exponentialfunktion. Ich mal' mal ein bisschen. Ähm, die Weltbevölkerung steigt ja nicht linear, weil es jedes Jahr 83 Menschen mehr werden. Obwohl... Nehmen wir an wenn jedes Jahr 83 Menschen, 83 Millionen Menschen mehr werden. Dann ist es.. ähm. Und die sich auch... Das ist eigentlich falsch, weil diese 83 Millionen Menschen könnten ja auch... Es sterben mehr Menschen als, äh weniger als wieder geboren werden. Wenn 83 Millionen geboren werden, dann kriegen die ja irgendwann auch Kinder, deswegen müsste es eigentlich exponentiell steigen. Nach der Aufgabenstellung steigt die Bevölkerung jedes Jahr gleichmäßig, das heißt, wir hätten doch 'ne lineare Funktion. Sagen wir hier ist, frag mich nicht, 83, und hier ist ein Jahr, dann haben wir nach einem Jahr 83 Millionen Menschen mehr, nach zwei Jahren doppelt so viele und so weiter.
57		*Zeichnet den Graphen einer linearen Funktion.*
58	S:	Deswegen muss das 83 mal x heißen.
59	I:	Okay. Gut. Hm. Gut, danke schön.

Aufgabe 5

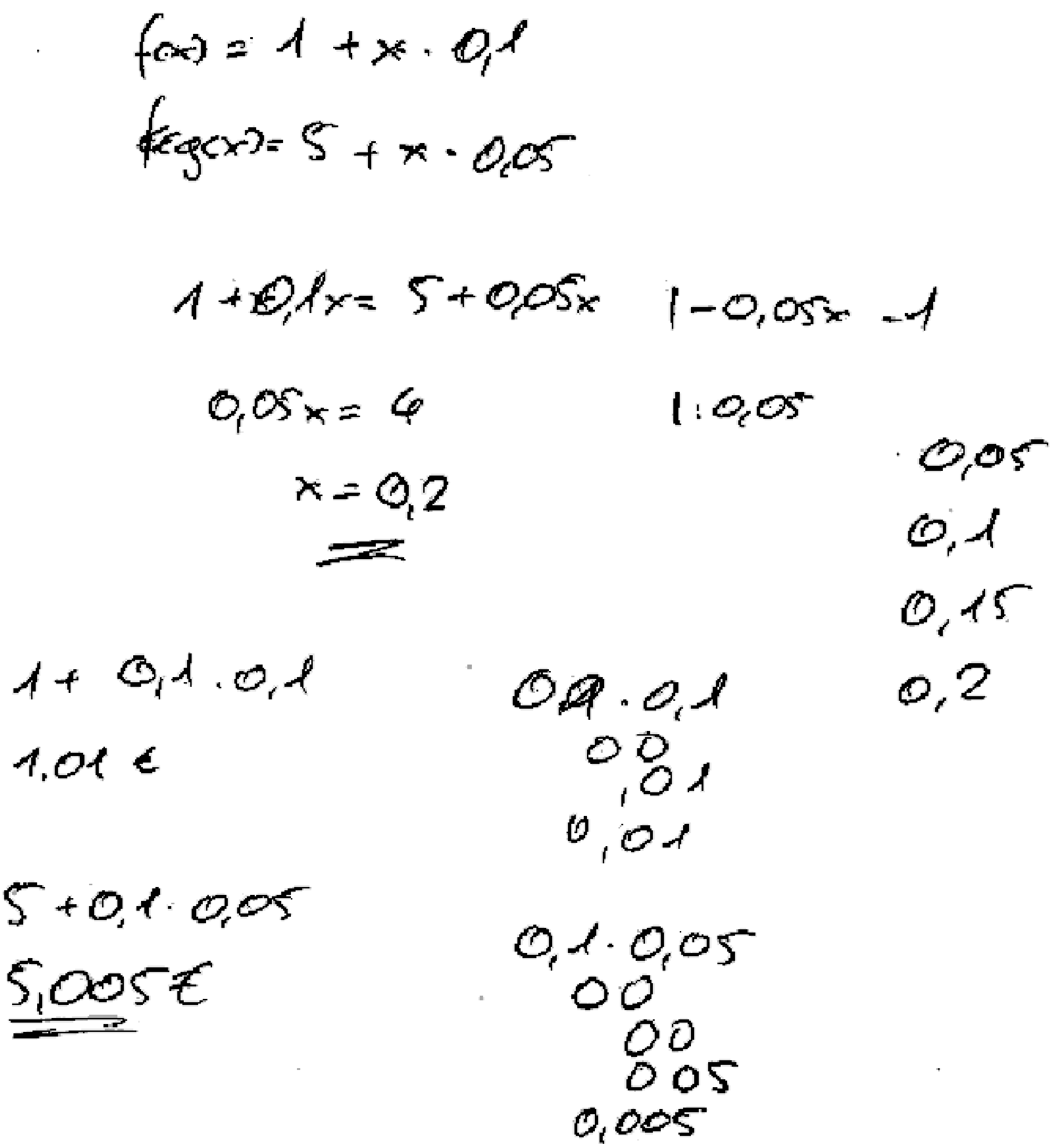


Abbildung 11: Biancas Mitschrift zu Aufgabe 5

60	S:	Oh je, ach meine Güte. [Liest Aufgabe 5 vor]. Ähm. Wir haben einmal die Formel f von x gleich Grundgebühr ist ein Euro plus Anzahl der Telefonate ist x mal äh zehn, äh 0,1, weil es zehn Cent sind in Euro umgerechnet.
61		$f(x) = 1 + x \cdot 0{,}1$
62	S:	Die zweite Formel ist g von x gleich Grundgebühr ist fünf Euro plus x mal äh wieder Anzahl, mal wieder Preis für ein Telefonat, sind 0,05 Cent.
63		$g(x) = 5 + x \cdot 0{,}05$
64	S:	Und ähm. Ich kann ja jetzt den Schnittpunkt ausrechnen. Bis zu der Telefon.. Minutendauer ist der erste Tarif billiger und der andere der zweite. Dann setzen wir die gleich, dann haben wir eins plus 0,1x gleich fünf mal äh plus 0,05x.

65		1 + 0,1x = 5+0,05x
66	S:	Dann rechnen wir minus 0,05x und minus 1
67		| - 0,05x - 1
68	S:	Und dann haben null komma null fünf x gleich vier
69		0,05 x = 4
70	S:	Dann geteilt durch null komma null fünf
71		| : 0,05
72	S:	Dann haben wir x gleich... [Pause] Also ich kann das nicht so gut im Kopf rechnen. Wir haben 0,5 für die erste Minute. Äh also 0,5 mal eins ist 0,5. Mal zwei ist eins.
73		0,05 0,1
74	S:	Dann hätten wir mal drei rein theoretisch 0,15.
75		0,15 0,2 x=0,2
76	S:	Ok. Ich hoffe, die Lösung ist richtig. Wenn nicht, hoffe ich, dass der Rechen.. müsste der Rechenweg richtig sein. So, sagen wir es sind jetzt Stunden. Das heißt wir haben bei einer.. Die schneiden sich bei 0,2. Wenn wir das jetzt in Stunden angeben, haben wir.. Ist der erste Tarif billiger, also der erste Tarif steigt steiler, geht steiler hoch als der äh zweite. Wobei der zweite schon bei fünf anfängt, weil man immer fünf Euro. Und bis zu einer Gesprächsdauer von 0,2 Stunden ist der erste Tarif billiger und ab einer Gesprächsdauer von 0,2 Stunden ist der zweite Tarif billiger.
77	I:	Mhm. Kannst du das vielleicht mal ausprobieren mit zwei verschiedenen Werten? Einer, der kleiner als 0,2 ist und einer, der größer als 0,2 ist.
78	S:	Das könnte ich mal machen. Immer diese kleinen Zahlen. Dann nehmen wir einmal mal 0,1. Dann haben wir eins plus 0,1 mal 0,1.
79		1 + 0,1 ·0,1
80	S:	0,1 mal 0,1. null null eins null. Haben wir 0,01.
81		0,1 ·0,1 00 ,01 0,01 1.01 €
82	S:	Dann haben wir 1,01 Euro. Beim zweiten haben wir dann fünf plus 0,1 mal 0,05.
83		5 + 0,1 ·0,05
84	S:	Dann haben wir null komma eins mal null komma null fünf. null mal das ist null, null mal ist auch null. null null. Sind fünf. null null. Dann haben wir ähm null komma null null fünf.
85		0,1 ·0,05 00 00 005 0,005
86	S:	Und dann haben wir einen Preis von 5,05 Euro.
87		5,005 €
88	S:	Au. Hm. [Pause]
89	I:	Warum „au”?
90	S:	Ähm, ich habe ja eben gesagt, dass ich das mit Stunden eingeben will. Weil mich hat das

		eben irritiert, wenn ich für 'ne Gesprächsdauer von nur 0,2, weil es ist ja rein theoretisch in Minuten angegeben. Und ähm wenn ich jetzt sage, dass der ab 0,2 Minuten die äh zweite Tarif billiger äh billiger ist, kann das noch nicht stimmen, weil bei den Werten ist es ja klar, dass ich bei 0,1 der erste Tarif billiger ist und bei 0,3 wird sich das nicht viel verändern, weil dann habe ich da 0,3 mal 0,05, das sind dann 0,015 Cent und das wären dann.. Ähm. 0,003, nee null Komma... 0,03 Cent, das wären dann immer noch 1,03 Cent, äh, Euro und das kann dann ja nicht ganz passen. Das heißt, ich muss dieses vier geteilt durch 0,05 falsch gerechnet haben, das müsste nämlich viel mehr sein. Aber geteilt im Kopf rechnen kann ich nicht.
91	I:	In Ordnung, okay. Ähm.
92	S:	Aber es müsste irgendwas mit. Wenn es mal 0,5 wär, wären es acht. Glaube ich zumindestens. Und das wären dann irgendwas, denke ich mal, zwischen 20 und 30 Minuten müssten das sein. Oder mehr.
93	I:	Und dein x bezeichnet jetzt was?
94	S:	Ähm, die Minutendauer. Also wir haben hier bei der ersten Formel die ich aufgestellt habe ist f von x gleich 1 für die Grundgebühr plus x mal 0,1. Das 0,1 ist der Preis in Euro.
95	I:	Okay, aber gerade hast du doch gesagt, das wär die Stundenanzahl.
96	S:	Ja, ich hab' mich eben versprochen, weil. Irgendwie. Mich hat dieses äh am Ende habe ich gesagt hier x ist gleich 0,2. Weil 0,2 Minuten für mich sehr wenig sind. Deswegen war ich irritiert und hab gesagt, das wären Stunden.
97	I:	Okay.
98	S:	Aber dann ist mir eben aufgefallen, als ich das versucht hab, nochmal zu beweisen, sag ich jetzt mal, dass das nicht sein kann. Und deswegen kann dieses Ergebnis nicht stimmen, weil das ja auch eigentlich laut Aufgabenstellung in Minuten angegeben werden muss.
99	I:	Okay. Dann Aufgabe 6.

Aufgabe 6

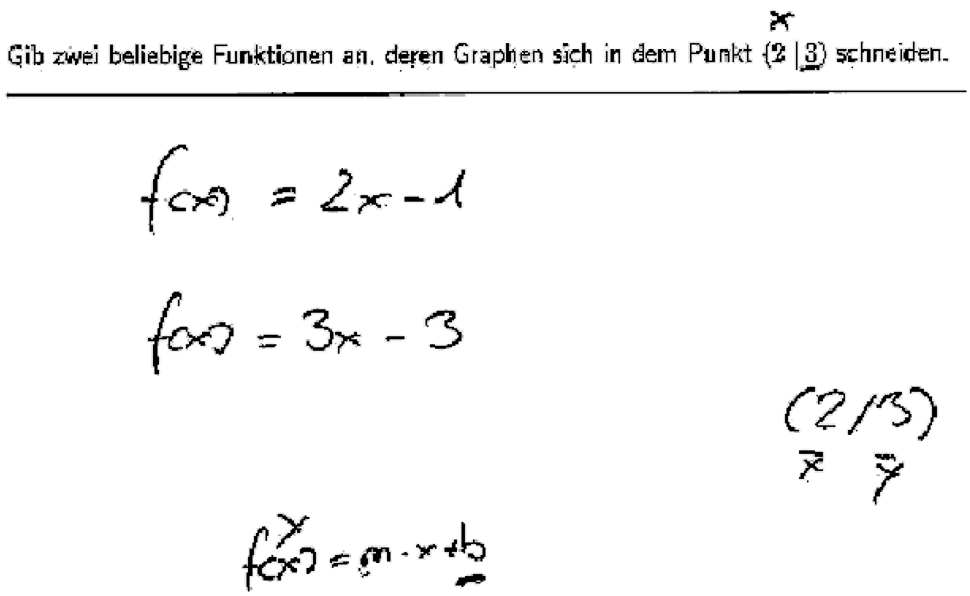


Abbildung 12: Biancas Mitschrift zu Aufgabe 6

100	S:	[Liest Aufgabe 6 vor.] Bei beiden den x-Wert von 2. Ähm. Irgendwas mal zwei muss drei

		ergeben. Och nee. Ähm. Dann einmal f von x gleich dieses 2 ist in dem Fall x, der x-Wert. Dann haben wir zwei mal x. Das wären in diesem Fall vier.
101		$f(x) = 2x$
102	S:	Minus eins ist drei. Weil wenn ich da den y-Wert ausrechnen will, setze ich x-Wert ein und dann habe ich den y-Wert. Dann zwei mal zwei ist vier minus eins ist drei. Dann stimmt der.
103		-1
104	S:	Und als anderes nehmen wir dann. f von x gleich drei mal x. Das wären in dem Fall sechs.
105		$f(x) = 3x$
106	S:	minus 3
107		$f(x) = 3x-3$
108	S:	Die laufen beide durch den Punkt und schneiden sich dann da auch.
109	I:	Wie würdest du das, ähm, jemandem erklären, der sowas noch nie gemacht hat?
110	S:	Also wie man ausrechnen kann, dass die Graphen durch den Punkt gehen?
111	I:	Wie man auf so eine Funktion kommen kann.
112	S:	Also da muss man ja erstmal die Grundfunktion wissen, nehmen wir jetzt mal die einfachste von der linearen. Das ist f von x gleich m mal x plus b.
113		$f(x) = m \cdot x+b$
114	S:	b ist der y-Achsenabschnitt, m die Steigung. Und ähm diese Schreibweise gibt an, dieses in Klammern zwei Schrägstrich drei.
115		(2 / 3)
116	S:	Ähm, zwei ist immer der x-Wert, der vordere, das andere ist immer der y-Wert.
117		x y
118	S:	Wie wir hier haben. f von x kann man auch y schreiben. Wenn ich.. Ist ganz klar, y ist gleich m mal x plus b. Wenn ich x einsetze, krieg ich y raus. Und jetzt muss ich herausfinden, wie kann ich meine zwei als ein x einsetzen, sodass in der Funktion, dass für y drei rauskommt. Und da ist es erstmal am einfachsten.. Weil es ist schwierig, 'ne Kommazahl zu finden, ich weiß gar nicht, ob's das gibt, wie viel mal zwei ist drei. Sowas kann man schlecht herausfinden, aber man hat ja noch diesen y-Achsenabschnitt, mit dem kann man ein bisschen plus rechnen. Deswegen könnte man erstmal schauen, nimmt man irgendeine Zahl mal mit unserer zwei, also unserem x in dem Fall, kann man dann x als x in die Funktion schreiben und, ähm, dann schaut man, wie viel, minus wie viel ist drei.
119	I:	Okay. [Abschluss des Interviews]

Nach Abschluss des Gesprächs: „Mathe macht mir auch erst Spaß, seitdem ich einen Taschenrechner habe. Vorher war ich richtig schlecht in Mathe, ich kann kein Kopfrechnen."

Förderung

Die Division durch 10 entspricht dem Verschieben des Kommas um eine Stelle nach links:

- 123 : 10 = 12,3

Bei der Division durch 5 kann man wegen 5 = 10 : 2 die Ausgangszahl verdoppeln und dann das Komma verschieben:

- 442 : 5 = 424 · 2 : 10 = 884 : 10 = 88,4

Oft kommt man schneller zum Ziel, wenn man die Ausgangszahl sinnvoll in einfach zu dividierende Summanden aufteilt:

- 1026 : 9 = (999 + 27) : 9 = 999 : 9 + 27 : 9 = 111 + 3 = 114

- $108 : 12 = (120 - 12) : 12 = 120 : 12 - 12 : 12 = 10 - 1 = 9$
- $36{,}4 : 7 = (364 : 10) : 7 = (364 : 7) : 10 = ((35 \cdot 10 + 14) : 7) : 10 = (5 \cdot 10 + 2) : 10 = 5 + 0{,}2 = 5{,}2$

Bei der Division durch Zahlen mit Nachkommastellen ist es oft sinnvoll, zunächst das Komma bei beiden Zahl zu verschieben (d. h. mit 10 zu erweitern):

- $144 : 1{,}2 = 1440 : 12 = (144 \cdot 10) : 12 = (144 : 12) \cdot 10 = 12 \cdot 10 = 120$

Außerdem kann man auch beide Zahlen in Faktoren zerlegen und kürzen, und die Division durch die Faktoren nacheinander durchführen:

- $2646 : 42 = (1323 \cdot 2) : (7 \cdot 2 \cdot 3) = 1323 : 7 : 3 = (1200 + 120 + 3) : 3 : 7 = (400 + 40 + 1) : 7 = 441 : 7 = (42 \cdot 10 + 21) : 7 = 60 + 3 = 63$

Stelle dir selbst einige Übungsaufgaben zur Division im Kopf und überprüfe mit einem Taschenrechner.

Problemlöseaufgaben:

1. Bestimme alle Primzahlen p, für die auch $p^4 + 1$ eine Primzahl ist (vgl. Noack et al. 2008, S. 24).
2. Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindkeit neben der Straßenbahnlinie entlang. Alle 30 Minuten wird er von einer Bahn überholt und alle 20 Minuten kommt ihm eine Bahn entgegen. In welchem Zeitabstand fahren die Bahnen? (vgl. Wenke o. J.)
3. Zeige das die Summe von drei aufeinander folgenden Zahlen immer durch drei teilbar ist.
4. Die Innenwinkel eines Dreiecks ergeben zusammen 180°. Wie ist es beim Viereck, Fünfeck, …, n-Eck?
5. Berechne die 100 000ste Ableitung von $f(x) = x \cdot \cos(x)$.

Christina

Aufgabe 1

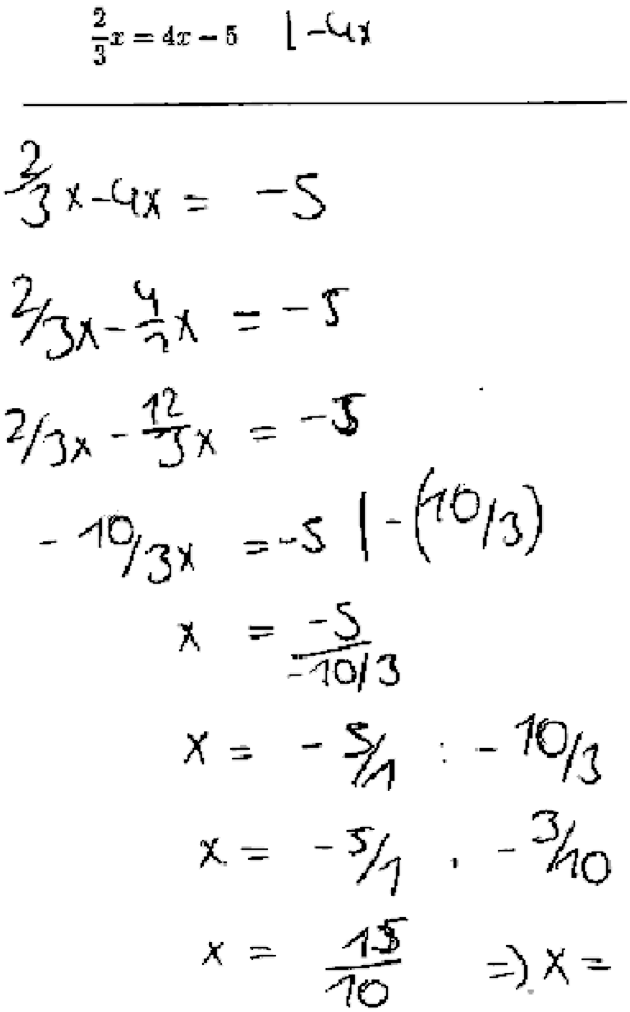


Abbildung 13: Christinas Mitschrift zu Aufgabe 1

1	I:	[Einleitung]
2	S:	[Liest Aufgabe 1 vor.] Ähm, da würde ich jetzt halt rein, soweit ich es gelernt habe, würde ich die Variable x, würde ich auf eine Seite bringen wollen. Und da ich jetzt auf beiden Seiten erstmal das x habe, bringe ich die vier x rüber, also in dem Fall dann minus vier x.
3		| - 4x
4	S:	zwei Drittel. Oh. Kopfrechnen. Zwei. Minus vier x. Minus fünf.
5		$\frac{2}{3}x - 4x = -5$
6	S:	Zwei Drittel minus 4x. Das ist so eine meiner Stärken glaube ich in Mathe. Äh. [Pause]
7	I:	Was denkst du gerade?
8	S:	Ich überlege gerade, was ich machen muss. Also auf jeden Fall würde ich erstmal diese vier auch erstmal in einen Bruch schreiben. Das wären dann zwei drittel x minus vier

		Eintel.
9		$\frac{2}{3}x-\frac{4}{1}x=-5$
10	S:	Dann müsste ich den Bruch umformen, also den gleichen Nenner auch benennen. Das wär dann. Dann müsste ich mal drei rechnen, das wären dann zwölf Drittel x. minus fünf.
11		$\frac{2}{3}x-\frac{12}{3}x=-5$
12	S:	Ich hoffe ich machs gerade richtig. Ich weiß es gerade selber nicht. Und ja, dann kann man halt diese beiden Terme oder Brüche subtrahieren, da sie den gleichen Nenner haben. Das wären dann zwölf minus, äh zwei minus zwölf. Ähm. Minus zehn drittel x gleich fünf, äh minus fünf.
13		$-\frac{10}{3}x=-5$
14	S:	Dann, um das x halt am Ende alleine stehen zu haben, teile ich minus, äh durch minus zehn Drittel.
15		$\mid -\left(\frac{10}{3}\right)$
16	S:	Äh. [Pause] Ich glaube, das kriege ich nicht mehr im Kopf hin. x gleich minus fünf durch minus zehn Drittel.
17		$x=\frac{-5}{-\frac{10}{3}}$
18	S:	Also das wären, wenn ich das ausrechne, bekomme ich dann diese Variable, also die Variable x raus. Auf jeden Fall.
19	I:	Mhm. Wie würdest du das dann ausrechnen? Also wie, wie könnte man diesen Bruch ausrechnen oder kürzen oder wie würdest du das jetzt machen?
20	S:	Also intuitiv ein Taschenrechner halt
21	I:	Okay, ein Taschenrechner.
22	S:	Weil's am einfachsten wäre, vor allem in der Klausur auf jeden Fall.
23	I:	Ja. Was ist die Schwierigkeit für dich jetzt daran?
24	S:	Schwierigkeit eigentlich nicht, aber halt Brüche vor allem halt wenn es wenn, es zum Einen eine ganze Zahl ist, in diesem Fall die fünf und dann durch einen Bruch zu teilen. Das finde ich ein bisschen schwieriger im Kopf zu machen.
25	I:	Mhm.
26	S:	Das würde ziemlich viele Anläufe brauchen bei mir.
27	I:	Und wenn das keine ganze Zahl wäre?
28	S:	Also wenn das zwei Brüche wären, glaube ich, wär's einfacher. Also ich könnte natürlich das jetzt auch umformen in auch Bruch. Ob ich das dann hinkriege...
29		$x=-\frac{5}{1} : -\frac{10}{3}$
30	S:	Zehn Drittel. Äh, dann nehm ich mit dem Kehrwert mal, soweit ich das noch in Erinnerung hab.
31		$x=-\frac{5}{1} \cdot -\frac{3}{10}$
32	S:	Dann.. Ja dann würd ich die halt die beiden addieren, die Brüche. Das wären dann fünfzehn Zehntel.

33		$x = \frac{15}{10}$
34	S:	Und gekürzt. Oder, also, ob man das noch anders schreiben könnte, wären das dann.. [Pause]
35	I:	Was denkst du gerade?
36	S:	Ich überlege gerade, ob man das noch anders schreiben. Also das. Also ich würde das einfach so stehen lassen jetzt. Also dann x gleich fünfzehn Zehntel.
37	I:	Was heißt anders Schreiben?
38	S:	Ja, ob das vielleicht noch also irgendwie herausmultiplizieren kann oder kürzen kann. Aber irgendwie.. Theoretisch ja schon, oder? Nee. Also ich würd's einfach stehen lassen, ich würd's gar nicht mehr umändern. Weil ich jetzt gerade gar nicht wüsste, wie ich das noch anders schreiben könnte. Deswegen.
39	I:	Okay. Danke. Dann kannst du die nächste Aufgabe machen und wieder erst laut vorlesen und dann anfangen.

Aufgabe 2

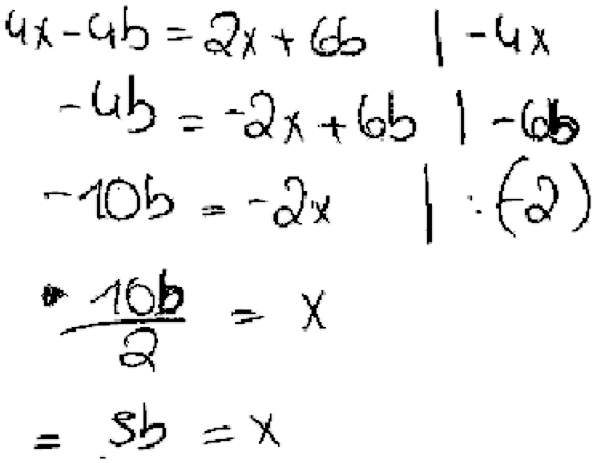


Abbildung 14: Christinas Mitschrift zu Aufgabe 2

^

40	S:	Die nächste Aufgabe. [Liest Aufgabe 2 vor] Ähm, dann würde ich glaube ich jetzt die Klammern erstmal auflösen, das wär am Einfachsten, denke ich mal. Dann würde ich halt die vier in die erste Klammer multi... reinmultiplizieren, das wären 4x mit 4b und bei der zweiten wären das dann 2x plus 6b.
41		$4x - 4b = 2x + 6b$
42	S:	Dann könnte ich einfach die zusammenfassen, die beiden, äh, Terme, das wir dann, äh, könnte ich die 4x rüberbringen, indem ich diese subtrahiere. Subtrahieren? Ja doch.
43		$\mid -4x$
44	S:	Und dann minus 4b gleich minus 2x plus 6b.
45		$-4b = -2x + 6b$
46	S:	Ähm und dann könnte ich die 6b wieder rüberbringen, dann würde ich halt auf beiden Seiten... Oder? Das macht aber eigentlich keinen Sinn. Jetzt bin ich gerade ein bisschen selbst verwirrt?
47	I:	Warum bist du verwirrt?
48	S:	Ich hab gerade irgendwie nicht mehr im Kopf, wie ich das genau machen soll. Mit zwei Variablen. Ich muss glaube ich zugeben, dass ich gerade nicht mehr weiter komme.

		Aber…
49	I:	Kein Problem
50	S:	Ähm. Nee, weil für mich ist es halt, aber, also, nicht die Schwierigkeit, aber bei zwei Variablen bin ich meistens so ein bisschen überfordert. Deswegen. Hm. Also ich wüsste glaube ich nicht auf Anhieb, was ich machen müsste. Also ich würd's einfach jetzt, intuitiv würde ich auch sechs b rüberbringen, aber zwei Variablen auf beiden Seiten haben ist jetzt nicht ganz sinnvoll. Jetzt glaube ich müsste ich einen neuen Weg einschlagen, aber den müsste ich mir dann noch... Hm.
51	I:	Das heißt, eine Lösung darf nur noch eine Variable enthalten?
52	S:	Also es ist auf jeden Fall möglich, dass es halt zwei Variablen gibt, aber halt für mich ist die Schwierigkeit, dass ich nicht genau weiß, wie ich damit umgehen soll im Endeffekt. Also ich weiß es eigentlich, aber ich hab es gerade nicht irgendwie nicht parat. Ich hab's ziemlich oft gemacht, aber momentan ist das irgendwie raus. Schon ein bisschen länger her.
53	I:	Wie würdest du denn jemandem erklären, was eine Variable ist?
54	S:	Also eine Variable ist halt ein bestimmter Faktor, den man halt frei, den man halt bestimmen kann und der auch variiert werden kann. Demnach auch ne Variable, also es kann jede Zahl sein, jede mögliche, also jede reelle Zahl. Oder auch rationale Zahl. Also einfach jede Zahl könnte es ähm sein. Sozusagen ein Platzhalter für jede mögliche Zahl. In diesem Fall sind das halt zwei. Also die Aufgabe ist ja eben nach x auflösen, dann müsste ich ja eigentlich auch.. Ja doch, dann wäre es eigentlich richtig, wenn ich das.. Dann mach ich das jetzt einfach, dass ich die sechs b rüberbringe. Minus 6b.
55		$\mid -6b$
56	S:	Dann wären's dann. Minus 10b gleich minus 2x.
57		$-10\,b = -2x$
58	S:	Und dann müsste ich durch minus zwei teilen.
59		$\mid :(-2)$
60	S:	Und dann hätte ich minus 10b durch zwei gleich...
61		$\frac{-10b}{2}=x$
62	S:	Plus. Also positiv. 10b durch zwei gleich x.
63		*Streicht das Minuszeichen durch.*
64	I:	Mhm.
65	S:	Ja.
66	I:	Kann man den Bruch noch umformen?
67	S:	Hm. Ich bin mir jetzt nicht ganz sicher, ob ich jetzt. Weil das sind ja eigentlich zwei verschiedene Zahlen. Jedenfalls 10b, den Wert kennen wir nicht. Aber bei der Multiplikation, Division, glaube ich, kann man das doch umändern. Deswegen, doch würde ich sagen, dass das geht. Also ja, da könnte ich theoretisch auch kürzen. Durch zwei. Dann wären das 5b gleich x.
68		$= 5b = x$
69	S:	Ich hoffe, das ist richtig. Also wenn's möglich wäre zu kürzen bei der Division, dann würde ich das halt kürzen auf 5b gleich x.
70	I:	Kannst du das überprüfen, ob man das darf oder nicht?
71	S:	Also überprüfen glaube ich. Ja, wenn ich halt für b einen Wert einsetze, könnte ich es prüfen. Jetzt in dem Fall, wenn b zwei wäre, zwei mal zehn sind zwanzig, durch zwei sind zehn. Und fünf mal zwei sind zehn. Also würde es passen in dem Fall.
72	I:	Okay. Alles klar dann nächste Aufgabe.

Aufgabe 3

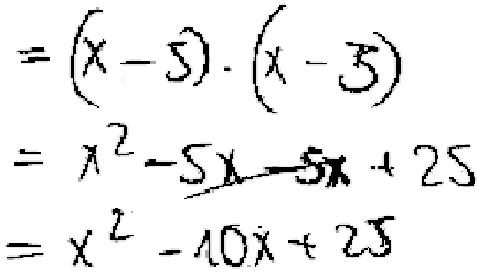
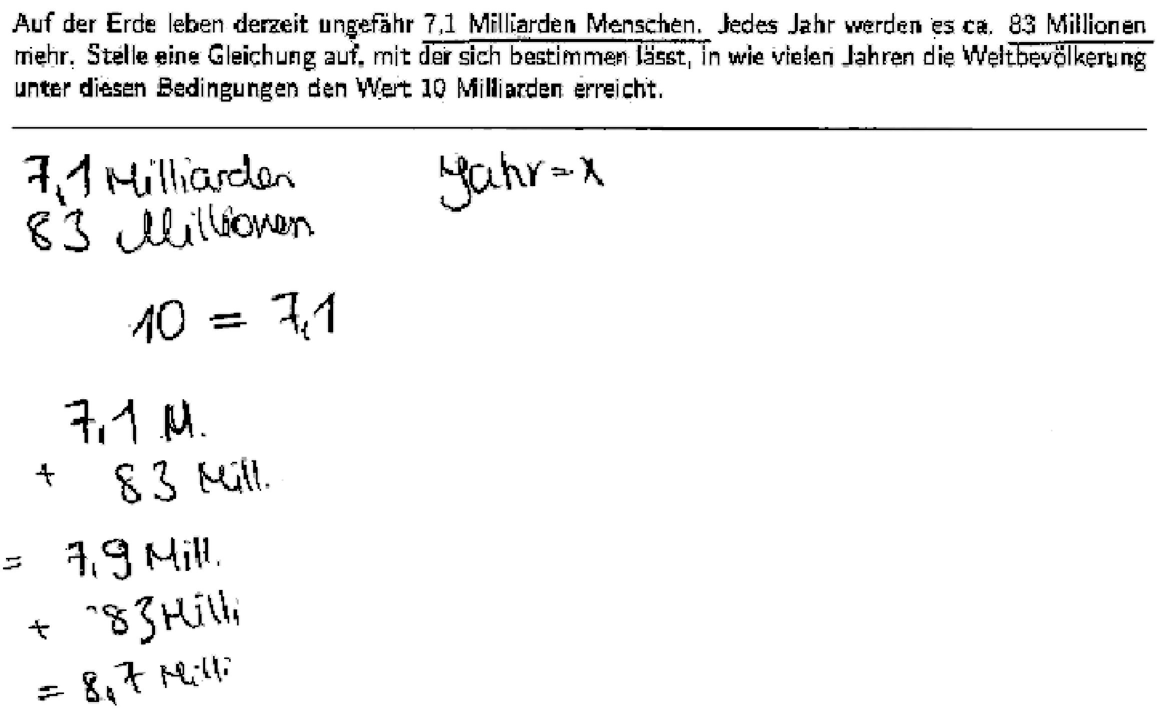


Abbildung 15: Christinas Mitschrift zu Aufgabe 3

73	S:	Ok. [Liest Aufgabe 3 vor.] Ähm, ja. Jetzt würde ich. Das ist. Also ich komme gerade irgendwie so, ich weiß, glaube ich, wie das geht, aber ich kann mich gerade irgendwie nicht so darauf. Also okay. Ähm, ich kann diese Hochzahl auch ausschreiben, indem ich einfach beide Klammern einfach multipliziere, in dem Fall x minus fünf in Klammern mal x minus fünf in Klammern.
74		$= (x-5) \cdot (x-5)$
75	S:	Und dann müsste ich halt jede Zahl mal, also jede Zahl multiplizieren. Ist x mit x sind x hoch zwei, dann minus fünf x ähm minus fünf x und plus fünfundzwanzig
76		$= x^2 – 5x – 5x + 25$
77	S:	Da die 5x wegfällt.
78		*streicht durch: -5x -5x*
79	S:	Also minus fünf. Ah nee, was mach ich da eigentlich? Das war schonmal falsch. Da hab ich zu schnell gedacht. x hoch zwei. Ist minus fünf mal x. Ähm. 25. Ja doch. Also dann wären das x hoch zwei minus 10x plus 25.
80		$= x^2 – 10x + 25$
81	S:	Das wär dann dann das Endergebnis.
82	I:	Mhm. Kannst du die allgemeine.. also die binomische Formel kennst du ja, ne?
83	S:	Ja.
84	I:	Kannst du die herleiten?
85	S:	Das glaube ich nicht mehr. Das ist schon...
86	I:	Wenn du es versucht?
87	S:	Ich wüsste gar nicht...
88	I:	Wie ging sie denn nochmal?
89	S:	Die erste ist ja x hoch, äh x plus. Oder a plus b hoch zwei glaube ich war das. Die zweite wär dann halt a minus b hoch zwei, die dritte glaube ich. Ähm, da hört's schon auf. Also ich hab's gerade nicht genau im Kopf, auf jeden Fall, also ich weiß halt, dass es halt drei gibt auf jeden Fall und.. Ich hab zuerst bei der Aufgabe an die gedacht, aber irgendwie kam ich gerade nicht zurecht, wie man das genau auflöst, deswegen habe ich das einfach mir ein bisschen erleichtert, indem ich halt die beiden Klammern einfach ausgeschrieben habe. Das wär für mich ein bisschen noch.. Also sobald die Klammern da waren, dachte ich so okay, das kenn ich doch irgendwo her. Ist es mir wieder eingefallen. Die dritte war glaube ich auch a minus b mal a plus b, in jedem Fall. Da würde nämlich rauskommen zwei a... Egal, das ist nicht so wichtig glaube ich gerade. Ich hab das nicht so im Kopf. Auf jeden Fall.
90	I:	Okay, dann können wir mit der vierten weiter machen.

Aufgabe 4



Auf der Erde leben derzeit ungefähr 7,1 Milliarden Menschen. Jedes Jahr werden es ca. 83 Millionen mehr. Stelle eine Gleichung auf, mit der sich bestimmen lässt, in wie vielen Jahren die Weltbevölkerung unter diesen Bedingungen den Wert 10 Milliarden erreicht.

7,1 Milliarden
83 Millionen

Jahr = x

10 = 7,1

7,1 M.
+ 83 Mill.
= 7,9 Mill.
+ 83 Milli
= 8,7 Milli

Abbildung 16: Christinas Mitschrift zu Aufgabe 4

91	S:	Okay. Die Aufgabe vier. [Liest Aufgabe 4 vor.] Okay ähm, da würde ich mir erstmal die ganzen Werte hier rausschreiben, damit ich weiß, mit welchen ich äh rechnen muss. Hab ich jetzt zum Teil, äh zuerst die 7,1 Milliarden Menschen als Ausgangswert.
92		*Unterstreicht „7,1 Milliarden Menschen" in der Aufgabenstellung*
93	S:	Dann habe ich hier 83 Millionen.
94		*Unterstreicht „83 Millionen" in der Aufgabenstellung und schreibt:* 7,1 Milliarden 83 Millionen
95	S:	Also das wär' dann eine Exponentialfunktion. Ähm, jetzt muss ich halt überlegen, wie ich die aufstellen muss. Also zur Zeit sind das halt 7 Milliarden Menschen und diese wachsen jedes Jahr um 83 Millionen. [Pause]. Ich glaube, das ist auch eine meine Schwächen hier. Das haben wir sogar vorhin, sogar vor Kurzem in Mathe gehabt, das habe ich auch irgendwie in der Klausur nicht ganz hingekriegt. Ähm. [Pause]. Ich habe jetzt auch gar keinen Lösungsanschlag, wie ich da vorgehen kann. 7,1 Milliarden. [Pause]
96	I:	Worüber denkst du nach?
97	S:	Also ich denke halt immer noch an diesen Lösungsweg halt, wie ich da vorgehen kann. Mir fällt gerade gar nichts ein, wenn ich ehrlich bin. Deswegen würde ich versuchen halt mich ein bisschen daran zu erinnern, was wir da gemacht haben damals, wie wir da vorgegangen sind. Also es muss auf jeden Fall 10 Milliarden rauskommen, das ist das Endergebnis. Ich mach jetzt einfach eine 10 daraus.
98		10 =
99	S:	7 Milliarden, also 7,1 ist der Ausgangswert und ähm.
100		7,1
101	S:	[Pause] Ich weiß es gerade gar nicht. Also. Mir fällt irgendwie nichts, nicht wirklich ein, wie ich da jetzt vorgehen kann.

102	I:	Lies mal nochmal die Aufgabenstellung.
103	S:	[Liest die Aufgabe vor]. Ja, die Gleichung kann ich jetzt in dem Fall wahrscheinlich nicht aufstellen, jetzt aus dem Kopf. Ich würde jetzt einfach, einfach solange 83 Millionen dazu addieren bis ich halt diese 10 Milliarden habe, aber das wird glaube ich eine ziemlich kostspielige, also zeitspielige auf jeden Fall, Angelegenheit werden. Ähm. Hm. Also auf jeden Fall mit jedem Jahr werden 83 Millionen dazu addiert. Dann ist nämlich die Variable das Jahr. Also Jahre gleich x in dem Fall.
104		Jahr = x
105	S:	Jetzt muss ich halt irgendwie diese 83 Millionen, äh diesen Wert mit der x in Verbindung bringen. [Pause] Also ich bin mir jetzt nicht, ganz einfach nicht sicher, ob das wirklich eine Exponentialfunktion sein kann, aber müsste es ja theoretisch eigentlich.
106	I:	Warum?
107	S:	Ja weil es halt immer um denselben Wert steigt und das erhöht sich ja immer wieder halt, also der Wert, der wird ja immer wieder erhöht. Der Ausgangswert. [Pause] Ich kann's, glaube ich, gerade, gerade irgendwie nicht erklären. Also vielleicht ist es auch falsch, was ich gerade denke. Aber. [Pause] Hm. Irgendwie fällt mir das irgendwie gerade nicht ein. Aber. Jedes Jahr werden es circa 83 Millionen mehr. Gleich. Ähm. Ich bin mir jetzt gerade nicht sicher, ob ich jetzt addieren oder multiplizieren muss, aber.. Ich glaub, mir würde würde jetzt gerade auch gar nicht mehr einfallen, wie ich das machen würde.
108	I:	Kann man das vielleicht auch ganz anders lösen? Vielleicht nicht über eine Gleichung, hast du vielleicht eine andere Idee?
109	S:	Ja, deswegen wollte ich ja auch am Anfang halt einfach die 83 Millionen einfach immer wieder dazurechnen, so oft bis halt, bis ich auf zehn Milliarden komme und dann die Anzahl wie oft ich das addiert habe einfach zusammen zählen, aber das wäre jetzt im Kopf ziemlich schwierig oder vor allem auch schriftlich.
110	I:	Okay, vielleicht fängst du mal an und dann machst du die ersten drei oder so. Und dann kannst du ja erklären, wie du weiter machen würdest.
111	S:	Mhm. Also ich würde jetzt diesen ersten Wert, 7,1 Milliarden Menschen, ähm 7,1 Milliarden, machen wir einfach mal
112		7,1 M.
113	S:	Dazu würde ich jetzt 83 Millionen addieren.
114		+ 83 Mill.
115	S:	Ich weiß nicht, ob man das so einfach machen kann, aber mir fällt einfach gerade nicht ein wie. [Pause] Ich glaube, das ist im Kopf gerade ziemlich schwierig. Weil halt diese großen Zahlen auch, diese Milliarden und Millionen, das ist für mich.... Ich weiß halt nicht, wie viele Nullen die alle haben, also wie viele Stellen meine ich jetzt. Ich hoffe mal, dass die Million, also dass die Milliarde die Stelle nach den Millionen ist. Müsste sie eigentlich sein. Dann wären es halt, also dann wäre es halt im darauffolgenden Jahr, also nach einem Jahr wachsen 83 Millionen zu, wären es im nächsten Jahr 7 Milliarden ungefähr, also 7,9 Milliarden wären's dann.
116		= 7,9 Mill.
117	S:	Im darauf folgenden Jahr wieder plus 83 Millionen.
118		+ 83 Mill.
119	S:	Ähm. Dann wären es dann. 8,7. Oder mehr als 8,7 auf jeden Fall Milliarden.
120		= 8,7
121	S:	Das würde ich halt so weiter führen, bis ich irgendwann auf die 10 komme.
122	I:	Okay, dann können wir Aufgabe 5 machen.

Aufgabe 5

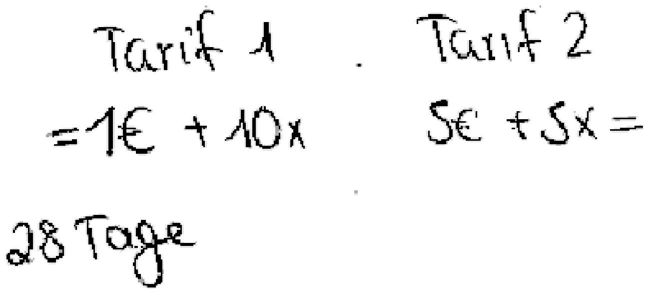


Abbildung 17: Christinas Mitschrift zu Aufgabe 5

123	S:	Mhm. [Liest Aufgabe 5 vor]. Okay. Dann muss ich ja überlegen, wie ich vorgehen soll. Ähm. Also die Grundgebühr hab ich auf jeden Fall erstmal bei Tarif 1. Besteht bei 1 Euro als Grundgebühr. Da bezahl ich pro Minute zehn Cent. Ähm.
124		Tarif 1 = 1 € + 10x
125	S:	Für welche monatliche Gesprächsdauer. Monatliche Gesprächsdauer. Jetzt wollen die halt pro Monat wissen. Ein Monat wären dann sagen wir mal 28 Tage.
126		28 Tage
127	S:	28 Tage ähm in Minuten umrechnen. Erstmal in Stunden. Äh. Im Kopf. 60. Ähm. [Pause]
128	I:	Was machst du gerade?
129	S:	Genau, also ich versuche, ich versuche jetzt die Tage. Also der Monat halt, der vorgegeben ist, wegen der Aufgabe für welche monatliche Gesprächsdauer, versuche ich in Stunden umzurechnen und dann halt in Minuten. Damit ich halt weiß, wie viel er halt für... Aber das ist ja auch nicht ganz realisitisch, weil er halt nicht den ganzen durchtelefoniert. Monatliche Gesprächsdauer. [Pause]. Hm. [Pause].
130	I:	Ist dir klar, was das Wort monatliche Gesprächsdauer bedeutet?
131	S:	Ich glaube, das ist mir gerade leider nicht klar, also ich habe gerade mal überlegt, ob ich das, damit auch wirklich was anfangen kann. Ich glaube nämlich nicht.
132	I:	Also gemeint ist Gesprächsdauer pro Monat, nicht dass die Gesprächsdauer ein Monat ist.
133	S:	Okay, achso.. Ich glaub, da wär ich nämlich diesmal auch ein bisschen... [Pause] Also ich weiß glaube ich auch nicht, wie ich da vorgehen soll. Also ich komm da jetzt irgendwie nicht drauf. Kosten beim Handytarif. Also eigentlich weiß ich, wie das geht, also ich hab's auch gemacht, aber irgendwie fällt's mir gerade nicht mehr ein, wie ich da jetzt, wie ich da vorgegangen bin.
134	I:	Stell dir mal vor du hast dein eigenes Handy und wie würdest du das ausrechnen, welcher für dich der günstigere ist?
135	S:	Ja. Ähm. Ich würde einfach schätzen, wie lange ich telefoniere innerhalb eines Monats. Dann würde ich halt so einen ungefähren Wert festlegen. [Pause]. Das ist halt für den ersten Tarif wär's halt als Grundgebühr ein Euro und dazu werden dann auch halt diese zehn Cent pro Minute addiert. Also dann in dem Fall dann zehn, zehn mal x. [Pause] Ähm. Tarif zwei. [Pause] Ähm. Wären dann halt diese fünf Euro plus dann eben diese 5 Cent mal x.
136		Tarif 2 5 € + 5 x =
137	S:	Also x halt als Variable für die Minuten. Da hab ich jetzt halt zwei, zwei Gleichungen.

		Die könnte ich halt vergleichen, indem ich sie gleichsetze. Aber halt, ich muss ich erstmal, dass beide denselben. Das sind ja erstmal nur zwei Terme. [Pause]
138	I:	Warum willst du sie gleichsetzen?
139	S:	Ich weiß jetzt momentan nicht so. Ähm. [Pause] Also diese beiden Ausgangs.. Also ich weiß auf jeden Fall dass ich mit diesen Ausgangstermen halt irgendwie. Hm. [Pause] Ich weiß jetzt irgendwie nicht, was jetzt. [Pause] Weil die sind für mich irgendwie noch nicht so, nicht ganz vollständig. Ich hab jetzt zwei Terme, aber es fehlt halt noch, wie soll ich sagen, ein Ergebnis, was rauskommen muss. Oder halt irgendwie, es kein Ergebnis noch, hm. Ich glaub, ich bin jetzt auch ein bisschen, also stecken geblieben dabei. Ich glaub da komm ich glaub ich gar nicht mehr jetzt.. Außer bei den beiden Termen jetzt. [Pause] Hm.
140	I:	Worüber denkst du nach?
141	S:	Ich versuche nur gerade meine Gedanken zu ordnen, halt mich vielleicht zu erinnern, wo ich jetzt, oder was ich jetzt machen soll. Aber..
142	I:	Ja, versuch mal deinen Gedanken auszusprechen, wenn du sie denkst.
143	S:	Mhm. Ja, ich versuch mich halt daran zu erinnern, also das hab ich glaube ich in der achten Klasse mal gemacht also versucht zu berechnen, aber ich komm da gerade jetzt nicht drauf. Ich weiß es jetzt auch gar nicht mehr, weil ich nicht weiß, was ich mit diesen beiden Termen anfangen soll. Also. [Pause] Hm. Nee, irgendwie ich komme da nicht drauf.
144	I:	Willst du die nächste Aufgabe machen?
145	S:	Ja, würde ich gerne machen.
146	I:	Gut. Ist die letzte.

Aufgabe 6

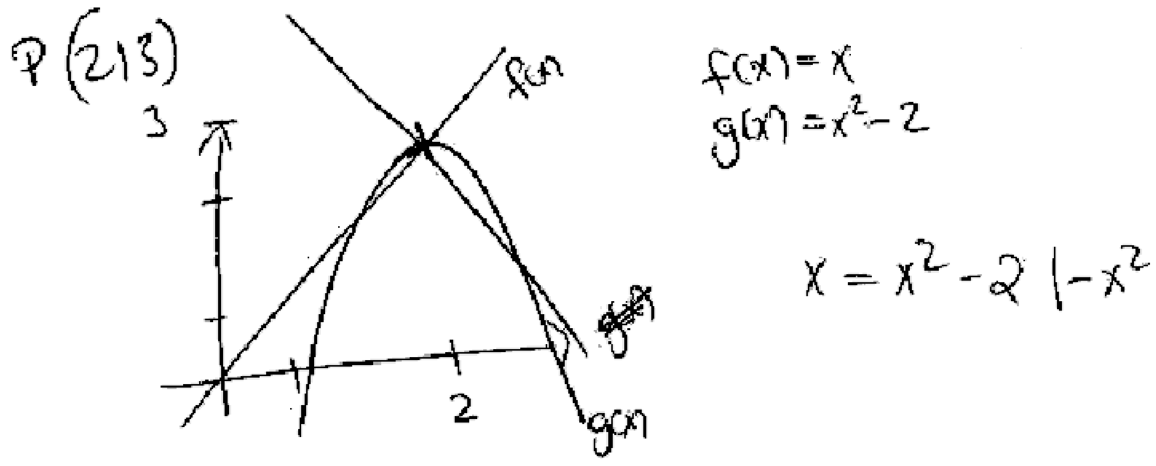


Abbildung 18: Christinas Mitschrift zu Aufgabe 6

147	S:	Okay. Ich glaube heute ist nicht so mein Tag. [Liest Aufgabe 6 vor.] Ach ganz toll. [lacht] Ähm, da würde ich halt mir erst, zuerst den Punkt halt rausschreiben. In dem Fall P zwei drei.
148		P (2 | 3)
149	S:	Ähm also. Das sind halt eben diese, die Koordinaten. Zwei drei ist halt in dem Fall die x... Die x-Koordinate ist halt bei zwei und y drei. Würde ich halt erst mir 'ne Zeichnung anlegen, also grobe Zeichnung für ein Koordinatensystem. Würde ich halt so abschätzen. Hm. Nicht ganz.

150		*Zeichnet Koordinatensystem und den Punkt* $(2\mid 3)$.
151	S:	Dann wäre hier unten zwei. Hier oben so grob gesagt drei. Dann würden die sich halt hier schneiden. Wenn's dann eben jetzt sagen wir mal zwei Geraden wären, würde die eine halt durch den Ursprung verlaufen ähm.
152		*Zeichnet Ursprungsgerade durch den Punkt*
153	S:	Und die andere, weiß ich nicht, [Pause] würde irgendwie senkrecht verlaufen oder in der Art. Kann natürlich auch hier von der zwei aus laufen. Machen wir daraus eine Senkrechte
154		*Zeichnet lineare Funktion, die orthogonal zur ersten Funktion verläuft.*
155	S:	Und die erste, der erste Graph sei jetzt f von x und der andere ist g von x. Der erste ist noch recht einfach, läuft durch den Ursprung und wäre halt f von x, ähm, ja gleich x.
156		$f(x) = x$
157	S:	[Pause] Äh. Ich glaub', ich bin mir jetzt glaube ich gar nicht so sicher, ob das so richtig ist, was ich da aufschreibe. Aber müsste es eigentlich. Ja, beim zweiten halt habe ich den Ursprung jetzt nicht. Und. Ja ist sogar noch theoretisch einfacher. Ja ich mach's mir einfacher, wenn ich halt daraus, wenn ich halt den anderen Graphen einfach als als Funktion zweiten Grades, also als Parabel zeichne.
158		*Zeichnet eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt* $(2\mid 3)$.
159	S:	Eine Normalparabel in dem Fall. Dann würde die sich aber in zwei Punkten schneiden und nicht in einem.
160	I:	Das steht da ja nicht, dass die nicht noch andere Schnittpunkte haben dürfen.
161	S:	Achso, na gut. Ja dann, wäre das hier g von x und das wären dann x hoch zwei verschoben in x. Also das mit den Faktoren, das mit den Verschiebungen, glaube ich, habe ich auch nicht ganz drauf jetzt. Ob das jetzt minus zwei ist oder. Also ich habe jetzt irgendwas im Kopf mit also mit Klammern, aber irgendwie macht das jetzt gerade.. Wie war das jetzt?
162		$g(x) = x^2 - 2$
163	S:	Also ich denke jetzt, dass es minus 2x ist, aber ich bin mir jetzt nicht ganz sicher, ob das so stimmt, weil das halt nach x verschoben ist also in x-Richtung, also positiv. Eine Normalparabel, deswegen x hoch zwei, aber sie wurde halt verschoben. [Pause] War es dann wahrscheinlich ein plus oder minus zwei. [Pause]. So am Ende muss ich halt, wenn ich die beiden Gleichungen gleichsetze, müsste auf jeden Fall für x zwei rauskommen und für y dann eben die drei. [Pause] Ja, dann müsste ich halt noch ein bisschen überlegen. [Pause] Also ich denke jetzt einfach rein intuitiv, dass ist halt minus zwei. Dann wäre halt die eine Funktion f von x gleich x und g von x gleich minus x äh x hoch zwei minus 2
164	I:	Kannst du das überprüfen?
165	S:	Ja, indem ich sie eben gleichsetze. Aber ich hab das Gefühl, dass das irgendwie falsch ist. Aber ich kann es einfach mal...
166		$x = x^2 - 2$
167	S:	Ja, dann habe ich die beiden Gleichungen eben gleichgesetzt. Also x gleich x hoch zwei minus zwei. [Pause] Kann ich.. das x hoch zwei halt rüber bringen. Das wären dann minus x hoch zwei
168		$\mid -x^2$
169	S:	Hm. [Pause] Das ist irgendwie das Komische, dass ich es nicht kann. Eigentlich müsste ich das ja können. Weil, also. Ich habe gerade keine Ahnung, was ich da mache. Aber auf jeden Fall ich würde jetzt ungefähr jetzt. So würde ich da vorgehen, dass ich mir halt eine Kurvenskizze aufbaue. Und einfach zwei Graphen einzeichne.
170	I:	Okay, wenn da jetzt rauskäme, dass sie sie nicht schneiden an dem Punkt, was würdest

		du dann machen?
171	S:	Ja halt, ich würde darüber, nochmal darüber nachdenken, ob halt ähm, den Graph, den ich angegeben habe halt. Ich hab ja nur geschätzt, vielleicht ist es auch halt falsch geschätzt und dann hab ich vielleicht den Graphen falsch benannt, dass es vielleicht gar nicht die Funktion ist. Und dass ich vielleicht noch äh irgendwie mehr Details einbringen muss. Oder vielleicht fehlt da irgendein Wert, dann muss ich den Graph richtig berechnen. Dass ich vielleicht die Steigung errechne. Und damit dann den Graphen, dadurch ja bestimmten kann.
172	I:	Okay. Hast du sowas schonmal gemacht? Sowas in der Art?
173	S:	Jaja, das schon ja, aber ist halt verdammt lange her. Deswegen habe ich das irgendwie nicht mehr. Das ist schon ein bisschen peinlich, dass das nicht drauf ist, aber. Also ich, im Grundaufbau auf jeden Fall weiß ich, was ich da machen muss, also diese Grundstrukturen. Aber halt ich habe mich damit nie so oft beschäftigt, deswegen ist das halt so ein bisschen raus. Aber auf jeden Fall, wenn ich damit jetzt mich beschäftigen würde, würde ich es auf jeden Fall, also wieder wissen. Komplett. [Pause] Aber da wie gesagt, ich würde halt mit der Zeichnung anfangen. Das wäre für mich halt am einfachsten. Vor allem diesen Punkt würde ich erstmal eintragen. Und von da aus einfach halt Graphen skizzieren, die dann halt in diesem Punkt verlaufen.
	I:	[Abschluss des Gesprächs]

Nach dem Gespräch: „Eigentlich habe ich Mathe ziemlich gut drauf, deswegen wundere ich mich gerade, dass ich das nicht mehr auf dem Sender habe."

Förderung

Problemlöseaufgaben wie bei Bianca.

Dennis

Aufgabe 1

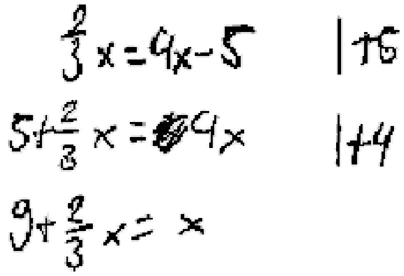


Abbildung 19: Dennis' Mitschrift zu Aufgabe 1

1	I:	[Einleitung]
2	S:	[Liest Aufgabe 1 vor.] Sowas kann ich eigentlich gar nicht. Ich würde da einfach versuchen, das x irgendwie weg zu kriegen. Weiß nicht. Vielleicht erstmal ähm zwei Drittel x gleich 4x minus fünf.
3		$\frac{2}{3}x=4x-5$
4	S:	Ja, da würde ich vielleicht denken erstmal hier so hinten ne plus fünf dran zu machen, dass ich das fünf auf die andere Seite bekommen würde. Irgendwie so glaube ich.
5		$\mid +5$
6	S:	Ja, dann wär das fünf. Denk ich. Oder das fünf geht ganz weg, ich weiß es gar nicht. Sowas kann ich echt nicht. Ähm, ja. Dann fünf plus zwei Drittel x gleich vier, 4x, denke ich.
7		$5+\frac{2}{3}x=4x$
8	S:	Ja. Eigentlich kann ich jetzt schon aufhören, ich weiß eigentlich nicht weiter. Vielleicht noch plus vier jetzt.
9		$\mid +4$
10	S:	Dann wären das neun plus zwei Drittel x gleich x, denke ich mir.
11		$9+\frac{2}{3}x=x$
12	S:	[Pause]. Ja, irgendwie so. Weiter kann ich das jetzt nicht. Das war's eigentlich schon.
13	I:	Okay. Bist du jetzt deiner Meinung nach fertig?
14	S:	Nee, fertig bin ich nicht, da fehlt auf jeden Fall noch was.
15	I:	Wann wärst du denn fertig?
16	S:	Wenn das x alleine stehen würde, also wenn das x irgendwie, wenn das hier gleich x, wenn nicht das x hier noch wäre. Denke ich mir.
17	I:	Okay, hast du eine Ahnung oder eine Idee, wie man da hin kommen könnte?
18	S:	Ja irgendwie minus x, aber dann wäre das minus x da auch und vielleicht das noch zusammen, aber das bringt mir jetzt ja auch nichts gerade. [Pause] Ich hätte es eigentlich auch. [Pause] Ich hätte es vielleicht auch anders machen [unverständlich], aber dann wärs auch wieder x x hier gewesen, andersrum machen können. Ja. [Pause] Vielleicht. [Pause]
19	I:	Okay, ähm, wenn ich jetzt nachfrage, das heißt nicht, dass es falsch ist, ich will dich nicht verunsichern.

20	S:	Ja, ist klar.
21	I:	Aber ich würde gerne halt wissen, was du da gemacht hast. Also erklärst du mir nochmal den ersten Schritt, wieso du da genau das gemacht hast? Und, ähm, ja genau.
22	S:	Weil ich irgendwie eine Seite frei bekommen wollte. So dass irgendwie. Ja, ich weiß auch nicht, ob das, ob die fünf eigentlich weg kommt, dann weil das dann eigentlich dann null so oder dann hierhin kommt. Manchmal ist es, keine Ahnung. Und dann wollte ich einfach, dass eine Seite freier ist. So dass jetzt ein x auf jeden Fall nur noch da steht. [unverständlich] um alles da weg zu nehmen.
23	I:	Mhm. Und im zweiten Schritt?
24	S:	Ja im zweiten Schritt hab ich auch wieder versucht, die vier da wegzukriegen.
25	I:	Okay, und dann hast du. Ähm. Warum jetzt. Warum hast du plus vier gerechnet, warum hast du nicht zum Beispiel minus vier gerechnet oder mal vier?
26	S:	Weiß ich gar nicht, stimmt. Minus vier. Stimmt. Eigentlich hätte ich minus vier, weil es ja plus vier ist, denke ich mir jetzt gerade. Stimmt. [Pause] Naja. Plus. Minus vier. [Pause] Weiß ich nicht. Plus kommt dann. Weiß ich nicht. Dachte ich mir einfach so.
27	I:	Okay. Wenn du jemandem erklären würdest, der noch nie Gleichungen gelöst hat, wie man sowas grundsätzlich macht, wie würdest du dem das erklären?
28	S:	Ähm [Pause]. Derjenige soll versuchen, das x irgendwie auf eine Seite des, des Gleich zu bekommen. Und das Ergebnis, was dann da rauskommt, das ist dann x.
29	I:	Okay. [Pause] Und ähm, ja. Okay. Dann machen wir mal die nächste Aufgabe. Liest du erst wieder laut vor?

Aufgabe 2

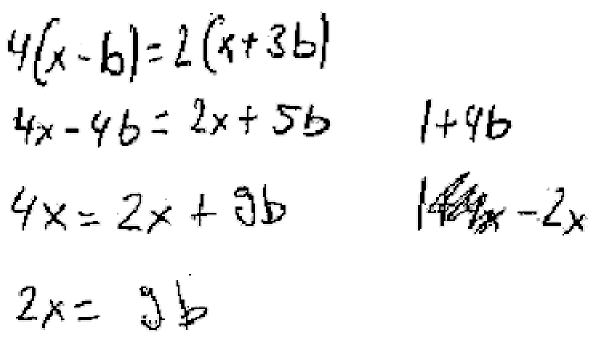


Abbildung 20: Dennis' Mitschrift zu Aufgabe 2

30	S:	[Liest Aufgabe 2 vor.] [Pause] Ja, da würde ich erstmal hier. [Pause] Hm.
31		4(x-b) = 2(x+3b)
32	S:	Ja, da würde ich vielleicht erstmal die Klammer auflösen. Also vier mal x, vier mal b, irgendwie sowas. Dann 2 mal x plus, äh 2x und zwei mal 3b. Aber dann wüsste ich auch nicht weiter.
33	I:	Versuch mal erstmal so weit, wie du kommst.
34	S:	[Pause] Da würde ich jetzt zwei mal 3b, würde ich denken. Fünf b vielleicht. Weiß ich nicht genau. So wär das dann bei mir.
35		4x – 4b = 2x + 5b
36	I:	Wie genau hast du das gemacht?
37	S:	Ja, vier mal x, vier x, vier mal b, vier b. Denk ich mir, weiß ich nicht genau. Zwei mal x, 2x und zwei mal 3b, 5b.
38	I:	Was ist dein Ziel? Wie müsste dein Ergebnis ungefähr aussehen? Oder wann wärst du

		wieder fertig?
39	S:	Dass ich erstmal die b's zusammen führe und dann die zwei x zusammen führe oder so ungefähr und dann weiter rechne, denke ich mir. [Pause] Das zum Beispiel 9b wäre und 6x oder ja. [Pause]
40	I:	Mach erstmal weiter wie du meinst.
41	S:	[Pause] Dann würde ich wieder plus 4b rechnen.
42		| + 4b
43	I:	Dann kommt 4x gleich 2x plus 9b
44		4x = 2x + 9b
45	S:	Gleich. [Pause] Plus vier. [Pause]
46		| + 4x
47	S:	Aber dann steht hier gar nichts mehr. [Pause]
48	I:	Was hast du denn jetzt vor? Was ist jetzt dein Ziel?
49	S:	Die Zahl vor dem x wegzubekommen.
50	I:	Okay. Und wenn das weg ist, dann hast du ja auf der anderen Seite auch noch ein x. Wie würdest du dann da die Zahl wegkriegen?
51	S:	Vielleicht das noch dazu addieren. [Pause] Minus zwei x ist dann.
52		| -2x
53	S:	Hier 2x gleich [Pause] Neun b sind.
54		2x = 9b
55	S:	[Pause] Weiter komm ich wieder nicht.
56	I:	Was stört noch?
57	S:	Die Zahl hier vorne. Ja, die Zahlen so. Irgendwie komme ich damit nicht zurecht gerade.
58	I:	Ist das schwieriger mit b's als mit anderen Zahlen, also wenn da richtige Zahlen stehen?
59	S:	Ja.
60	I:	Warum?
61	S:	Weil das keine Zahlen sind. Weil da jetzt mal irgendwas mal fünf oder plus fünf und 2x das wär einfacher. [Pause] Hm.
62	I:	Was bedeutet denn eigentlich 2x? Für jemanden, der noch nie die Schreibweise 2x gesehen hat.
63	S:	Ich glaube zwei mal irgendwas oder so, ja. Das steht für irgendeine Zahl das x. [Pause]
64	I:	Okay.
65	S:	Nächste?
66	I:	Ja, kannst mit der nächsten weitermachen.

Aufgabe 3

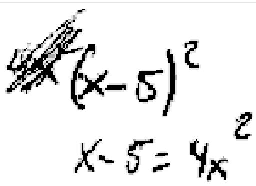


Abbildung 21: Dennis' Mitschrift zu Aufgabe 3

67	S:	[Liest Aufgabe 3 vor.]

68	I:	Also gemeint ist, das ohne Klammern irgendwie zu schreiben.
69		$4x^2$
70	S:	[Pause] 4x hoch zwei würde ich mir jetzt denken.
71	I:	Okay, wie kommst du darauf?
72	S:	Ja, weil hier x minus 5 und dann würde ich das x zu der fünf zu tun und da vorher ein x minus die fünf genommen würde, würde ich sagen vier. x.
73	I:	Das habe ich jetzt nicht verstanden.
74	S:	Ja, weiß nicht, da steht ein x und minus fünf, dann denke ich mir das x minus fünf...
75	I:	Vielleicht schreibst du es nochmal kleinschrittiger auf.
76	S:	Ja. x minus. Hoch zwei. [Pause]
77	I:	Naja, gerade hast du im Kopf was gemacht.
78		Streicht $4x^2$ durch und schreibt: $(x-5)^2$
79	S:	[Pause] Da steht ja auch noch hoch zwei. [Pause]
80	I:	Ja, gerade hast du doch im Kopf was gemacht.
81	S:	Ja, das war irgendwie dann ne vier. Aber dann hab ich mir gedacht, so das sind dann vier x, weil x minus fünf dachte ich mir jetzt. Wenn ich die x zu der fünf zutun würde, wären das fünf x und dann, weil da vorher x minus fünf, wären das vier x, so dachte ich mir das. Ja.
82	I:	Okay.
83	S:	Das war auch nicht richtig, weiß ich. [Pause]
84	I:	Okay, und wie macht man jetzt weiter? Also du hast jetzt x minus 5 gleich 4x ausgerechnet und dann hattest du dann... Jetzt noch das hoch zwei, dann kommt was raus?
85	S:	Ja, genau.
86	I:	4x quadrat, wie du das da oben stehen hattest?
87	S:	Ja, 4x quadrat.
88	I:	Okay. Gut. Ja, Aufgabe vier bitte wieder erst laut vorlesen, bitte.

Aufgabe 4

Abbildung 22: Dennis' Mitschrift zu Aufgabe 4

89	S:	[liest vor] [Pause] Also 7,1.
90		7,1
91	S:	plus acht, äh 0,83 [Pause] x vielleicht
92		+ 0,83x
93	S:	Also sind das die Menschen plus die Millionen, die dazu kommen und dann mal das wie oft das dazu gerechnet werden muss, damit das zehn Milliarden ergibt.
94	I:	Okay. Das ist jetzt deine Gleichung?
95	S:	Ja, das wäre meine Gleichung. Also sowas hab ich noch nie gemacht, also selber eine Gleichung aufstellen.
96	I:	Okay
97	S:	Das habe ich einfach nur gerade ausgedacht

98	I:	Und wie kriege ich raus, wann das zehn Milliarden sind?
99	S:	[Pause] Hm, ja mit der Gleichung kriegt man das glaube ich nicht raus. Ja, weiß ich auch nicht. [Pause] Da habe ich keine Ahnung von.
100	I:	Okay. Aufgabe fünf. Erst bitte vorlesen.

Aufgabe 5

Die Aufgabe wurde ohne Notizen gelöst.

101	S:	[liest vor] [Pause] Na, ich weiß ja nicht, wie viele Minuten er im Monat telefoniert. Oder wie ist das? Soll ich jetzt sagen, welcher von beiden der günstigere Tarif ist?
102	I:	Ja.
103	S:	Ich weiß ja nicht, wie viel die im Monat telefonieren.
104	I:	Macht das einen Unterschied?
105	S:	Ich denke schon. [Pause] Oder es ist beides gleich.[Pause] Denn wenn ich jetzt nur fünf Minuten im Monat telefoniere, dann ist der günstiger [zeigt auf Tarif 1 in der Tabelle].
106	I:	Tarif 1?
107	S:	Ja.
108	I:	Warum?
109	S:	Weil dann, Grundgebühr ist ein Euro und wenn der fünf Minuten telefoniert, sind es dann eins fünfzig und er muss generell schon fünf Euro zahlen am Anfang des Monats oder am Ende des Monats. Und wenn der fünf Minuten telefoniert, sind's dann 25 Cent, also fünf Euro 25 Cent.
110	I:	Okay. Und wenn jemand viel telefoniert?
111	S:	Wenn jemand viel telefoniert, dann würde ich sagen, [zeigt auf Tarif 2] der ist günstiger. Kommt darauf, wie viel er telefoniert. [Pause] Wenn der am Tag so fünf Minuten telefoniert, dann ist der auf jeden Fall günstiger.
112	I:	Kannst du das begründen?
113	S:	Ja, weil er für die Minute weniger zahlt. Er zahlt weniger für die Minute. Und dann. Der muss nur. [Pause] Wenn er. [Pause] Obwohl. [Pause] Der muss vierzig Minuten telefonieren und dann hat er genauso viel bezahlt wie er im Grundtarif. Er [Tarif 1] ist günstiger. Immer. Denk ich mir.
114	I:	Nach vierzig Minuten? Oder nochmal, das hab ich nicht verstanden.
115	S:	Wenn er jetzt zehn Minuten telefoniert, hat er ja einen Euro sozusagen bezahlt.
116	I:	Ja.
117	S:	Ja und wenn der vierzig Minuten telefoniert, hat er jetzt insgesamt fünf Euro. Und hat schon vierzig Minuten telefoniert und er [Tarif 2] hat schon insgesamt fünf Euro bezahlt, nur damit er den Tarif hat.
118	I:	Und wenn es noch mehr werden?
119	S:	Wenn es noch mehr werden? Dann müsste er ja genauso zahlen. Aber dann irgendwann, irgendwann überholt er ihn. Irgendwann wird er überholt von dem Tarif 1. Wenn er viel telefoniert, sagen wir mal wenn er, er auch, dann wird er überholt. Also jetzt hat er sieben Euro, glaube ich und er fünf Euro bei vierzig Minuten und er wird irgendwann überholt.
120	I:	Kannst du rausfinden, wo?
121	S:	Bei 60 Minuten.
122	I:	Kannst du das begründen? Oder überprüfen?
123	S:	Bei 60 Minuten ist er bei sechs Euro.

124	I:	Tarif 1?
125	S:	Genau. Nee. Dann ist er bei 7 Euro. [Pause] Oder? [Pause] Ja klar, er telefoniert 60 Minuten und hat dann sechs Euro plus den sind 7 Euro. Er bei 60 Minuten hat er sieben Euro und er hat fünf Euro plus [Pause] 3 Euro. Acht Euro. Nee, hat er immer noch nicht überholt. Bei 70. [Pause]
126	I:	Was rechnest du gerade?
127	S:	Ich rechne immer weiter. Also ich rechne für den und dann für den. Wann er ihn überholt. Ich denke mal so bei 10 Minuten, also bei 100 Euro sind die gleich.
128	I:	Bei 100 Euro?
129	S:	Ja. Glaube ich.
130	I:	Wie viele Minuten wären das?
131	S:	Ähm, 100.
132	I:	Wie kommst du darauf?
133	S:	Ja, habe ich mir einfach gerade so gedacht. Nein, wenn er [Tarif 1] neunzig Minuten telefoniert, dann hat er neun Euro und dann kommt der Euro dazu und dann sind das zehn Euro, ja Euro. Und wenn er [Tarif 2] neunzig Minuten telefoniert, dann sind das neun Euro fünfzig, also er hat ihn dann schon überholt.
134	I:	Okay.
135	S:	Ja, wenn er neun Eu..., neun Minuten telefoniert und er neun Minuten, dann hat er vier Euro fünfzig und er neun Euro. Da stehen. Und dann sind das 9 Euro 50 und er hat 10 Euro.
136	I:	Also ist jetzt welcher günstiger?
137	S:	Also bei, wenn die beiden 8 Minuten telefonieren, sind die gleich.
138	I:	8?
139	S:	Ja.
140	I:	Okay, wie kommst du jetzt darauf? Das versteh ich jetzt gerade nicht.
141	S:	Wenn er acht Minuten telefoniert, dann kostet's für ihn neun Euro. Denn acht mal zehn, zehn Cent. Acht Euro. Und dann neun, plus den Euro sind neun Euro. Und er hat fünf Euro und dann acht mal fünf sind dann vier Euro und dann sind es neun Euro.
142	I:	Alles klar, okay. Gut, dann können wir zur letzten Aufgabe übergehen.
143	S:	Soll ich das noch aufschreiben?
144	I:	Nee, ist alles in Ordnung. Ist ja alles aufgezeichnet worden.

Aufgabe 6

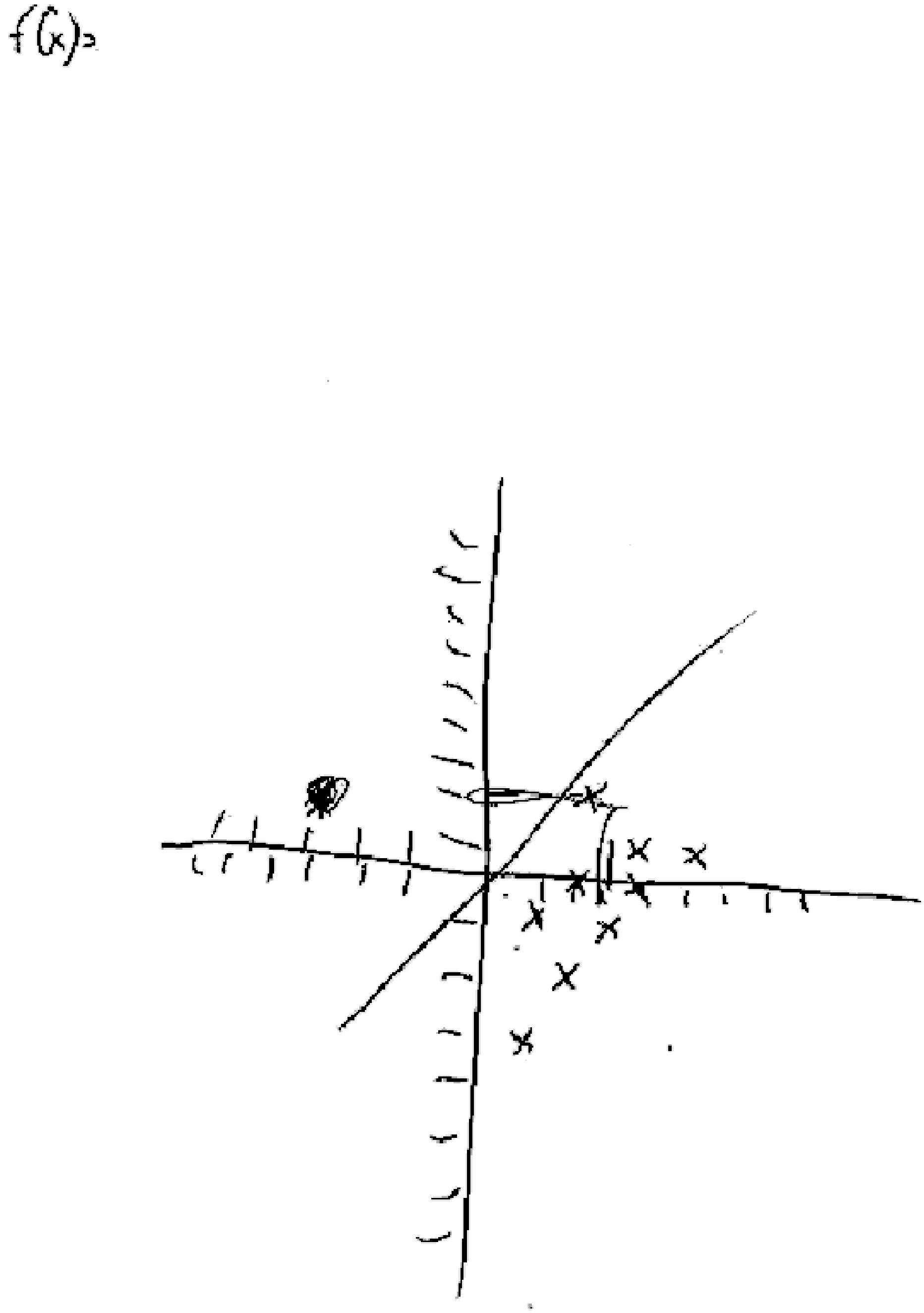


Abbildung 23: Dennis' Mitschrift zu Aufgabe 6

145	S:	Okay. [liest vor] Okay, das kann ich auch nicht. Okay. Funktionen angeben. [Pause] f von x gleich
146		f(x) =
147	S:	[Pause]
148	I:	Was überlegst du?
149	S:	[Pause] Hm. Das. Eine Funktion zu bilden. [Pause] Was ich da beachten muss, [Pause] dass die sich da schneiden. [Pause] Kann ich nicht. Irgendwie gleich. Hm. [Pause] Nee,

		das kann ich nicht. Tut mir leid.
150	I:	Wie hast du es denn versucht gerade im Kopf?
151	S:	Ich hab versucht, ja. Ich hab mir überlegt wie ich das, ich weiß nicht. Das ist ganz schwierig für mich. [Pause] Ich wüsste nichtmal, wie ich anfangen soll. Ob dann f von x gleich x plus irgendeine Zahl, würde ich sagen. Aber da fällt mir keine ein. Ich kann auch, wenn ich eine Funktion habe, kann ich die nicht in einen Graphen eintragen. Da muss ich erst, wenn ich nur eine Funktion sehe, dann muss ich erst eine Tabelle machen und sowas.
152	I:	Okay, kannst du ja machen.
153	S:	Okay. Ich kann mir aber keine ausdenken, dass die dann darauf passt. [Pause]
154	I:	Und wenn du einen Graphen hättest, was würdest du dann damit machen?
155	S:	Wie meinst du das?
156	I:	Also du meintest, du könntest nicht einfach einen Graphen zeichnen. Warum würdest du denn jetzt einen zeichnen wollen?
157	S:	Nein, also wenn ich 'nen, ich könnte, wenn ich 'ne, wenn ich 'ne Funktion hätte und dann hier einen Graphen und dann da steht, ich müsste irgendwas eintragen in den Graphen, dann könnte ich das aus der Funktion auch nicht ablesen. Dann müsst ich quasi erst so eine Tabelle machen immer und dann einzeln ausrechnen. Dass ich dann alles eintragen kann, die Punkte.
158	I:	Okay.
159	S:	Sowas kann ich nicht, das ablesen. Das wurde mir irgendwann mal erklärt, aber das habe ich wieder vergessen.
160	I:	Könntest du dir vielleicht einfach irgendeine Funktion ausdenken und überprüfen, ob die ähm, ob die möglich ist? Also ob das eine von deinen Funktionen sein könnte, die da sich schneidet?
161	S:	[Pause] Kann ich mit Taschenrechner rechnen?
162	I:	Ja, von mir aus.
163	S:	Okay. [tippt]
164	I:	Aber dann sag auch bitte, was du eintippst.
165	S:	Mode und dann Tabelle, dann f von x gleich [Pause] x [Pause] irgendwas, ne? Okay. Oh. Plus. [Pause] Minus oder Plus, das weiß ich [unverständlich. vermutlich:] in dem Fall nicht. Ob nun fallen oder steigen. Einfach minus [Pause] vier, so. [unverständlich: Tastenbezeichnungen am Taschenrechner]. [Pause]. Okay, dann hab ich jetzt. Darf ich auch hier drauf malen?
166	I:	Ja klar.
167		Zeichnet ein Koordinatensystem.
168	I:	Startet bei 1 und minus 3. [Pause] 1 [Pause] Minus 1, 2, 3. Mhm.
169		Zeichnet den Punkt (-3|1) ein
170	S:	Oh fuck. [Pause] So, dann Start ist bei 1 und minus 3.
171		Streicht (-3|1) wieder durch und zeichnet den Punkt (1|-3) ein.
172	S:	Dann 2 und minus 2.
173		Zeichnet (2|-2) ein.
174	S:	[Pause]
175	I:	Was ist jetzt das Problem?
176	S:	Wenn du jetzt hier startest. Auf der x-Achse. Auf der x-Achse 1. 1 und. [Pause] minus 3. 2 und -2. 1 und minus 3. [Pause] 3 und minus. Ja. [Pause] Dann 0 und 4. Ja das würde dran vorbei gehen. Fünf und eins.
177		Zeichnet die Punkte (3|-1), (4|0) und (5|1) ein.

178	I:	Wo müsste es denn langgehen?
179	S:	Zwischen 2 und 3, denk ich mir.
180	I:	Was heißt dazwischen?
181	S:	Hier.
182		Zeichnet den Punkt (3|2) ein.
183	S:	Okay.
184	S:	Zwei und drei Schnittpunkt.
185	I:	Okay, äh. Hast du jetzt vielleicht eine Idee, wie man die Funktion verbessern könnte, damit es funktioniert?
186	S:	[Pause] Zwei vielleicht.
187	I:	Wie kommst du auf die zwei?
188	S:	Weiß nicht, vielleicht könnte das heißen zwei Schritt nach da, so.
189	I:	Nach links?
190	S:	Genau.
191	I:	Du hast wo die zwei gemacht?
192	S:	f von x. x minus zwei.
193	I:	Okay.
194	S:	Dann hab ich. [Pause] eins minus eins. Ist hier. Zwei null. Drei eins.
195		Zeichnet die Punkte (1|-1), (2|0) und (3|1) ein.
196	S:	Bin ich wieder dran vorbei. [Pause] Ja, das ist dann einfach x minus x null oder so. x. [Pause] [Tippt in den Taschenrechner] Nee, auch nicht. Hier gerade aus durch jetzt. Dann. [Pause] minus null komma fünf. [Tippt in den Taschenrechner]. Hab ich drei und 2,5 jetzt. Dann eins. Ja, dann hätte ich den. drei und zwei.
197	I:	Okay, alles klar. [Abschluss des Gesprächs]

Förderung

Viele Rechnungen kann man sich sparen, wenn man eine Problemstellung einmal auf eine allgemeine Art und Weise gelöst hat. Wenn man zum Beispiel einmal ganz allgemein bestimmt hat, wie groß die Oberfläche einer Kugel ist, deren Radius man kennt, muss man sich das nicht für jede Kugel neu überlegen. Manchmal ist auch die Frage nach dem Allgemeinen die eigentliche Problemstellung: Gilt diese und jene Feststellung eigentlich immer oder nur für bestimmte Fälle? Ist es zum Beispiel eigentlich immer so, dass eine gerade Zahl herauskommt, wenn man zwei ungerade Zahlen addiert oder hat bloß noch niemand die passenden Zahlen ausprobiert?

Um nicht mit ganz bestimmten Zahlen zu rechnen, sondern allgemein zu bleiben, ersetzt man in der Rechnung die Zahlen durch Platzhalter und rechnet damit als wären es ganz normale Zahlen. Am Ende kann man wieder Zahlen für die Platzhalter einsetzen. Üblicherweise nimmt man Buchstaben als Platzhalter. Weil sie geändert, also variiert werden können, nennt man sie *Variablen*. Weil sie nur Platzhalter für ganz normale Zahlen sind, wird mit ihnen auch ganz normal gerechnet. Es gibt also keine speziellen Rechenregeln, die „nur für Buchstaben" oder „nur für Zahlen" gelten, denn die Buchstaben stehen für Zahlen.

Beispiele:

1. Ein Würfel mit der Kantenlänge a hat die Oberfläche $6 \cdot a^2$.
   Zwischen Zahlen und Variablen lässt man den Malpunkt auch manchmal weg. Man kann also auch $6a^2$ schreiben. Das ist aber nur eine Schreibweise und ändert an der Rechnung nichts.
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Das gilt allgemein, ganz egal, welche Werte man für a und b einsetzt.

Auch mehrere Variablen sind möglich. Dann müssen sie aber zur Unterscheidung unterschiedlich bezeichnet werden, also verschiedene Buchstaben bekommen. Und wenn Zahlen eingesetzt werden, müssen für gleiche Buchstaben natürlich auch gleiche Zahlen eingesetzt werden.

Aufgaben:

1. Lies den obigen Text. Kannst du alles nachvollziehen? Versuche, offene Fragen zu klären.
2. Beschreibe noch einmal mit eigenen Worten, was Variablen sind und wozu sie gut sind.
3. Berechne die Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge 6cm mit der obigen Formel.

Förderung zum Thema Gleichungen wie bei Adrian.

Eduard

Aufgabe 1

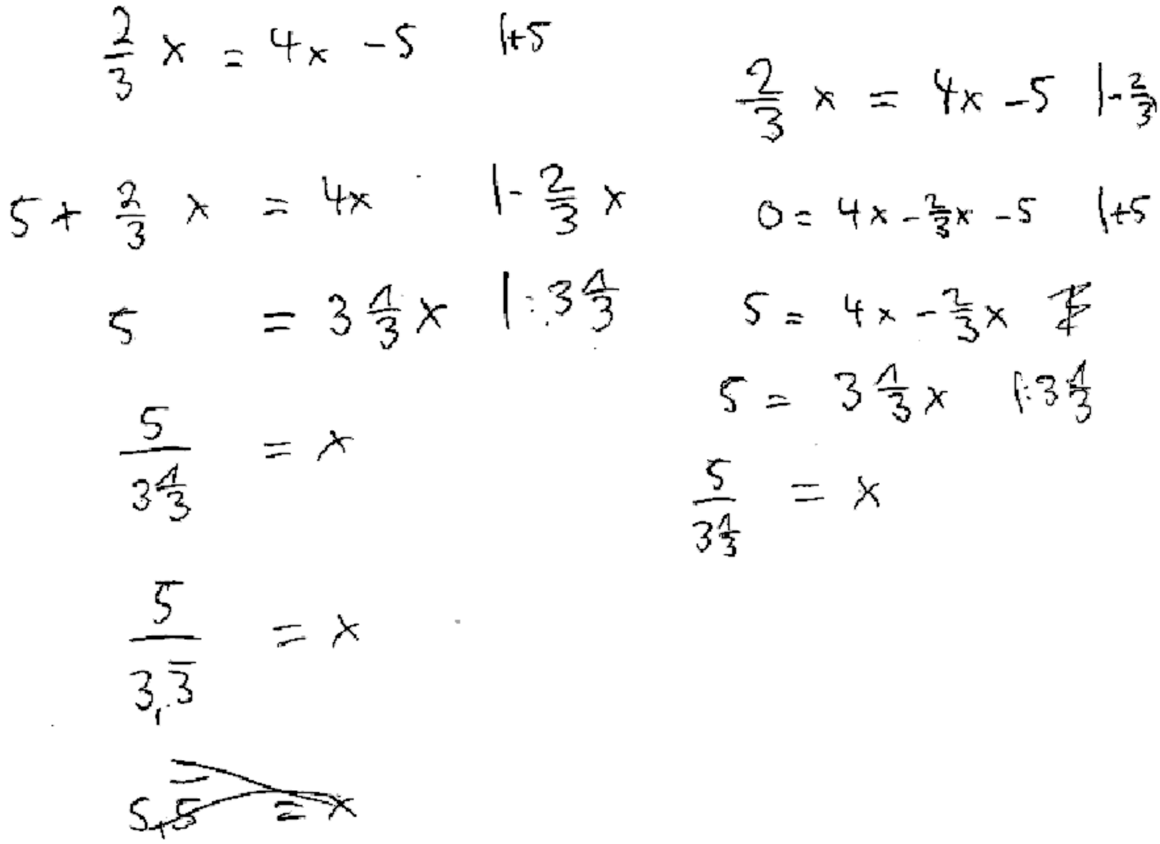


Abbildung 24: Eduards Mitschrift zu Aufgabe 1

1	I:	[Einleitung]
2	S:	[Liest Aufgabe 1 vor] Joa, jetzt nach x auflösen. Ich schreib das jetzt einfach nochmal auf.
3		$\frac{2}{3}x=4x-5$
4	S:	Ja. Würde ich einfach plus fünf rechnen.
5		$\mid +5$
6	S:	Also äh, zwei Drittel. Auch wenn's nichts bringt [lacht]. 4x.
7		$5+\frac{2}{3}x=4x$
8	S:	Äh. So, jetzt bring ich x auf eine Seite. Minus zwei Drittel x.
9		$\mid -\frac{2}{3}x$
10	S:	Dann habe ich hier fünf gleich. drei ein Drittel x.
11		$5=3\frac{1}{3}x$
12	S:	Denk ich mal. Sieht so aus, ja. Und jetzt durch drei ein Drittel.

13		$\mid : 3\frac{1}{3}$
14	S:	Ich glaube, ich bin schon auf das falsche Ergebnis gekommen. [lacht] Weil jetzt sowas Krummes rauskommt. Ähm. [Pause] Fünf durch 3 ein drittel gleich x.
15		$\frac{5}{3\frac{1}{3}} = x$
16	S:	Keine Ahnung, ob das richtig ist. Denk ich mal falsch, ne?
17	I:	Okay, kann man das äh noch anders schreiben?
18	S:	Ja, da könnte man jetzt 'ne Dezimalzahl draus machen oder so. Also. Würde ich jetzt erstmal fünf durch drei komma drei Periode oder irgendwie so und dann.
19		$\frac{5}{3,\overline{3}} = x$
20	S:	Ja was kommt da raus? Kommt fünf komma fünf Periode raus.
21		$5,\overline{5} = x$
22	S:	Würde ich sagen jetzt. Keine Ahnung,. Ich habe jetzt einfach. Nee, das passt auch nicht. Das ist, das ist ja Schwachsinn. Weiß ich auch nicht.
23	I:	Woran erkennst du, dass es „Schwachsinn" ist?
24	S:	Äh, weil. Ich hab jetzt gerade gedacht einfach. Ach keine Ahnung, was ich gedacht habe. Wenn jetzt hier 3,3 stehen würde oben, dann wär's ja, dann wär's ja eins. Das macht einfach keinen Sinn, was ich hier gemacht hab. [Pause] Nee, keine Ahnung. Das ist einfach Schwachsinn. Ist das jetzt falsch?
25	I:	Ich sag dazu nichts.
26	S:	Du sagst dazu nichts. Ich rechne es jetzt einfach nochmal.
27		$\frac{2}{3}x = 4x - 5$
28	S:	So. Bring ich mal erst zuerst hier x rüber. So.
29		$\mid -\frac{2}{3}x$ $0 = 4x - \frac{2}{3}x - 5$
30	S:	Hm. Jetzt bring ich die fünf rüber.
31		$\mid +5$
32	S:	Damit ich x auf einer Seite habe.
33		$5 = 4x - \frac{2}{3}x$
34	S:	Und jetzt verkürze ich irgendwie das ganze. Also, da muss ich im Prinzip nur einfach. Das bleibt ja gleich. Darf man, darf ich einen Taschenrechner haben, nein ne?
35	I:	Eigentlich nicht. Was würdest du eintippen in den Taschenrechner?
36	S:	Vier minus zwei Drittel. Aber. [Pause] Ich denke mir, das sind drei ein Drittel. [Pause] Ja was sonst, drei ein Drittel.
37		$5 = 3\frac{1}{3}x$
38	S:	Keine Ahnung.
39	I:	Ja okay, das hast du ja links auch schon stehen gehabt,
40	S:	Weiter.

41	I:	Ja, wie kommt man jetzt weiter? Jetzt durch drei ein Drittel teilen wie gerade?
42	S:	Jetzt durch drei ein Drittel teilen, genau.
43	I:	Und dann?
44	S:	Dann hab ich hier halt x und dann habe ich hier fünf durch drei ein Drittel.
45	I:	Und das würdest du dann in den Taschenrechner eintippen?
46	S:	Und das würde ich jetzt in den Taschenrechner eintippen.
47	I:	Alles klar.
48	S:	Sonst wüsste ich nicht, wie ich das jetzt, mit dieser, mit diesem komischen ein Drittel da lösen könnte.
49	I:	Okay.
50	S:	Interessiert mich jetzt, ob ich das richtig gemacht habe.
51	I:	Kann ich dir hinterher mitteilen.
52	S:	Okay. Auf geht's. Kann ich weiter machen einfach, ne?
53	I:	Ja, kannst mit der nächsten Aufgabe weiter machen.

Aufgabe 2

$$4(x-b) = 2(x+3b)$$

$$4x - 4b = 2x + 6b \quad |+4b$$

$$4x = 2x + 10b \quad |-2x$$

$$2x = 10b \quad |:2$$

$$x = 5b$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = 10b \quad |:10$$

$$0{,}2x = b$$

Abbildung 25: Eduards Mitschrift zu Aufgabe 2

54	S:	[Liest Aufgabe 2 vor]. Schreib ich wieder erstmal auf.
55		4 (x-b) = 2 (x+3b)
56	S:	Ja, da würde ich jetzt einfach erstmal die Klammern auflösen. Also 4x minus 4b gleich.
57		4x – 4b =

58	S:	Also, da habe ich jetzt links die Klammer aufgelöst. Dann rechts. 2x plus 6b.
59		2x + 6b
60	S:	So. Jetzt würde ich einfach plus 4b rechnen, also hätte ich hier 4x [nächste Zeile]. plus 4b [Anmerkung zum Rechenschritt].
61		4x | + 4b
62	S:	4x gleich 2x plus 10b.
63		= 2x + 10b
64	S:	Minus zwei x.
65		| –2x
66	S:	Dann habe ich jetzt das x auf einer Seite und das b auch. Dann habe ich hier 2x gleich 10b.
67		2x = 10b
68	S:	Und durch, jetzt durch zwei teilen oder kann man auch durch zehn, ist ja egal. Und dann hab ich hier x gleich 5b
69		x = 5b
70	I:	Okay, und wenn du durch zehn geteilt hättest?
71	S:	Wenn ich jetzt durch zehn geteilt hätte, kann ich ja mal hier drunter machen. Ich glaube, da kann man dieses Zeichnen verwenden, weiß ich aber nicht.
72		⇔
73	S:	10b gleich 2x.
74		2x = 10b
75	S:	So, jetzt durch 10.
76		| :10
77	S:	Wäre rausgekommen b gleich 2x durch zehn, also zwei durch zehn sind 0,2, ne. Denk' ich mal.
78		0,2x = b
79	S:	Also 0,2x gleich b. Ist halt andersrum.
80	I:	Okay und was ist jetzt richtiger?
81	S:	Ist beides richtig.
82	I:	Ja okay.
83	S:	Aber. Ja ich denke mal, man soll nach x auflösen. Deswegen ist das hier richtig, also würde ich jetzt hier so einen Doppelstrich drunter machen.
84		*unterstreicht x=5b*
85	I:	Alles klar, okay danke. Aufgabe 3.

Aufgabe 3

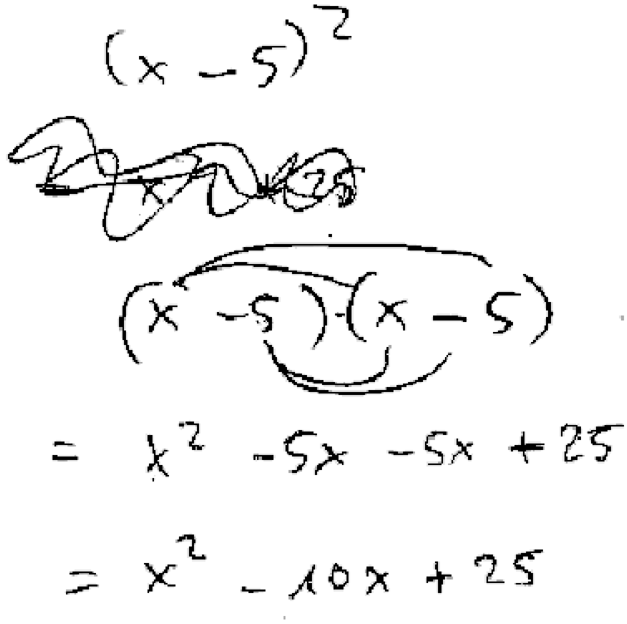


Abbildung 26: Eduards Mitschrift zu Aufgabe 3

86	S:	[Liest Aufgabe 3 vor.] [unverständlich] Ich würde jetzt immer... Ich würde jetzt entweder die binomische Formel anwenden, dann käme raus x quadrat minus, äh plus 25.
87		$(x–5)^2$ $= x^2+25$
88	S:	Ich weiß nicht, ob man da jetzt, ja doch so. Oder ich würd's, x minus 5. Also, wenn ich mir jetzt nicht sicher wäre, dass es so wäre, dann würde ich so machen. Würde ich einfach die beiden Klammern aufschreiben, also das ausschreiben.
89		$(x–5) \cdot (x–5)$
90	S:	Das mal das, das mal das, das mal das, das mal das.
91		*Verbindet die Summanden mit Strichen.*
92	S:	Also x mal x ist x hoch zwei. x mal minus 5 ist minus fünf x, äh minux fünf mal x ist wieder minus fünf x.
93		$= x^2 – 5x - 5x$
94	S:	Das verwirrt mich jetzt. Habe ich jetzt was falsch gemacht? Nee. [Pause] Und minus fünf mal fünf ist 25.
95		$+ 25$
96	S:	Ach was hab ich denn jetzt falsch gemacht? Ach, ist gar nicht die dritte binomische Formel. Ja, gut dass ich es nochmal ausgerechnet habe. Das ist die zweite. Und dann, äh. Also kommt hier halt minus 25 raus, äh plus 25. So und dann haben wir gleich x hoch zwei minus zehn x, weil jetzt zwei mal fünf mal, äh fünf x. Und dann plus 25. So, das wäre denk ich auch mal bei der zweiten binomischen Formel rausgekommen.
97	I:	Okay.

Aufgabe 4

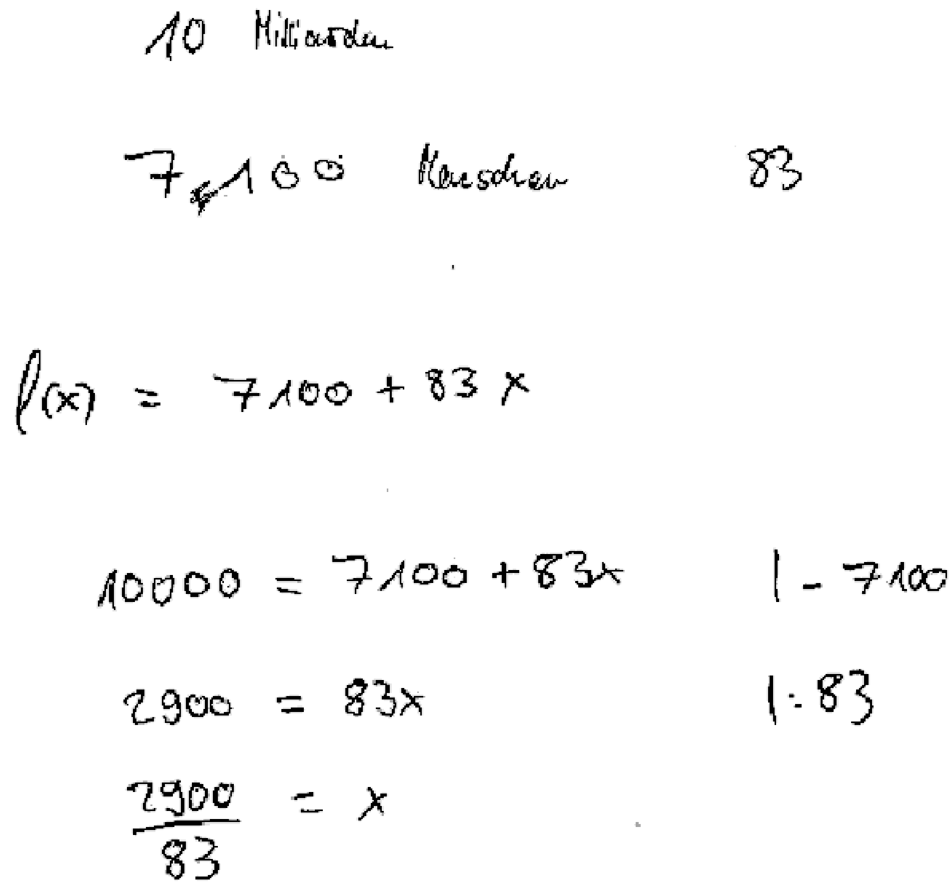


Abbildung 27: Eduards Mitschrift zu Aufgabe 4

98	S:	[Liest Aufgabe 4 vor] Jetzt würde ich das ganze nochmal lesen [lacht], weil ich jetzt nichts verstanden habe. Auf der Erde leben derzeit 7,1 Milliarden Menschen, okay gemerkt. Jedes Jahr werden circa 83 Millionen mehr, okay. Stelle eine Gleichung auf, mit der sich bestimmen lässt, in wie vielen Jahren die Weltbevölkerung unter diesen Bedingungen den Wert 10 Milliarden erreicht. Also 10 Milliarden ist das Ziel, das würde ich mir jetzt irgendwie aufschreiben oder so.
99		10 Milliarden
100	S:	7,1 Millliarden gibt es derzeit und 83 Millionen kommen jedes Jahr dazu.
101		7,1
102	S:	Also würde ich einfach, nee sieben komma eins Milliarden würde ich erstmal als Millionen schreiben, hätte ich hier siebentausendeinhundert Milliarden, äh Millionen Menschen. Und jedes Jahr kommen 83 dazu.
103		7100 Menschen 83
104	S:	Also würde ich jetzt einfach, würde ich hier 'ne Funktion machen f von x. Oder so, keine Ahnung.
105		f(x)
106	S:	f von x gleich. Ähm. [Pause] Ja doch. [Pause] 7100 plus 83 x.
107		= 7100 + 83x
108	S:	x ist dann die Anzahl der Jahre. Und dann einfach das gleichstellen mit... Äh. Nee, was

		hab ich jetzt gemacht? Nee doch. Zehn Mill..., dann mit 10 Millionen gleichstellen, also 7100 plus 83 x gleich 10000.
109		10000 = 7100 + 83x
110	S:	Und dann würde ich jetzt minus 7100 rechnen.
111		| –7100
112	S:	Dann hätte ich jetzt hier 2900. Gleich 83x.
113		2900 = 83x
114	S:	Und jetzt rechne ich durch 83.
115		| : 83
116	S:	Hätte ich hier x gleich 2900 durch 83, keine Ahnung wie viel das ist.
117		$\frac{2900}{83} = x$
118	I:	Ja, brauchst du nicht aufzurechnen. Alles klar, danke.

Aufgabe 5

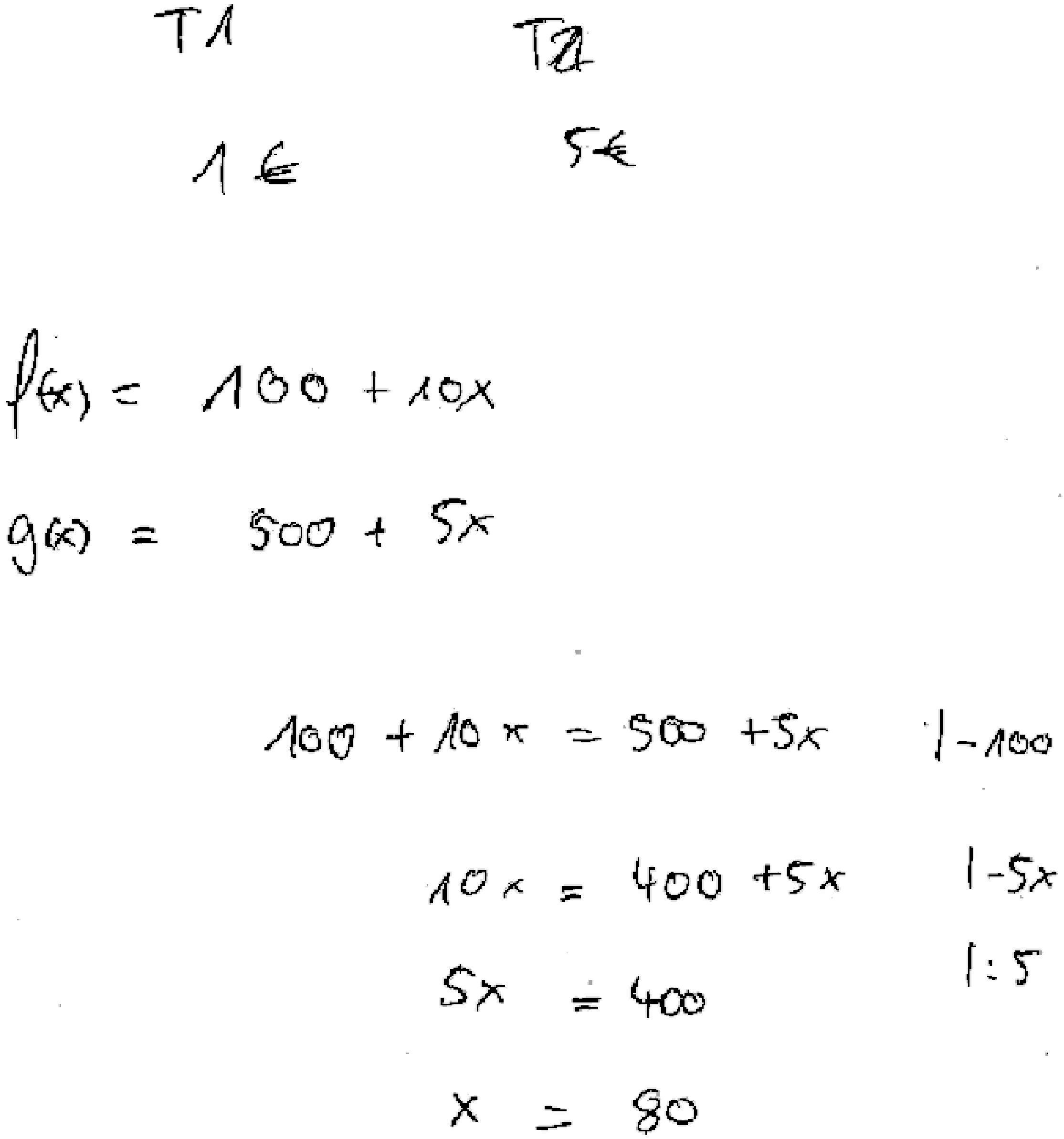


Abbildung 28: Eduards Mitschrift zu Aufgabe 5

119	S:	[Liest Aufgabe 5 vor] Hm. Jetzt würde ich wieder das ganze nochmal lesen [lacht]. Die Kosten bei einem Handytarif, blabla. [Pause] Okay, jetzt die Frage, welcher der günstigere Tarif für welche monatliche Gesprächsdauer ist. Äh. Ja, der eine Tarif 1 hat einen Euro Grund, Tarif zwei, also Grundgebühr, hat fünf Euro so. Äh.
120		T1 T2 1€ 5€
121	S:	Und jetzt geht es ja darum, wo man mehr telefonieren muss, damit ähm T1 teurer wird als T2. Öh, ja. Ich würde jetzt einfach, ich würde wieder 'ne Gleichung machen f von x gleich ja.
122		f(x) =
123	S:	Eins, nee machen wir einfach 100, machen wir in Cent. 100 plus 10x. Ja.

124		100 + 10x
125	S:	Und g von x, das ist dann Tarif zwei gleich 500 plus, also 500 für 5 Euro. 500 plus 5 x.
126		g(x) = 500 + 5x
127	S:	Und dann gucken wann die sich, äh einfach gleichstellen.
128		100 + 10x = 500 + 5x
129	I:	Warum setzt du die gleich?
130	S:	Ich stell die gleich, damit ich gucke, wann wann, wann die den gleichen äh Preis, Preis haben sozusagen und ab dann wird T1 teurer. [Pause] Ja. So dann. Also seh ich ja gleich, Moment. Ich. Oder sonst noch ne Frage?
131	I:	Nee, ist okay.
132	S:	Würde ich jetzt einfach minus 100.
133		| – 100
134	S:	Also 10 x gleich 400 plus 5 x. Und dann minus fünf x
135		10x = 400 + 5x | -5x
136	S:	Habe ich hier 5 x gleich 400. Dann durch 5.
137		5x = 400 | : 5
138	S:	x gleich weiß ich nicht, vierhundert durch fünf. Pff, Junge junge, wo sind wir hier. Sind 8 denk' ich mal, äh 80.
139		x = 80
140	S:	Und äh, ja bei 80, bei 80 Gesprächsminuten ist, sind beide gleich, gleich äh preis-, preisgünstig und ähm so bei. Soll ich das jetzt, die Antwort drunterschreiben?
141	I:	Brauchste nicht. Kannst du auch sagen.
142	S:	Und wenn, wenn ich jetzt äh. Für die monatliche Gesprächsdauer von unter 80 Minuten ist Tarif 1 günstiger und für die monatliche Gesprächsdauer von über 80 Minuten ist Tarif 2 teurer. Nee, andersrum. Oder warte mal [Pause]. Für die monatliche Gesprächsdauer von über 80 Minuten ist Tarif 1 teurer. Und für unter 80 Minuten ist Tarif 2 teurer. Und bei 80 Minuten sind sie gleich.
143	I:	Und warum ist es so 'rum und nicht anders 'rum?
144	S:	Weil die, ja Tarif 1 fängt halt, da musst du... Weil weniger, umso weniger Minuten du hast, umso weniger musst du im Prinzip bezahlen. Äh, ja im Vergleich zu Tarif zwei, weil das 'ne höhere Grund-, 'ne höhere Grundgebühr hat.
145	I:	Okay.
146	S:	Ja weiß ich nicht.
147	I:	Gut, dann können wir die letzte Aufgabe machen.

Aufgabe 6

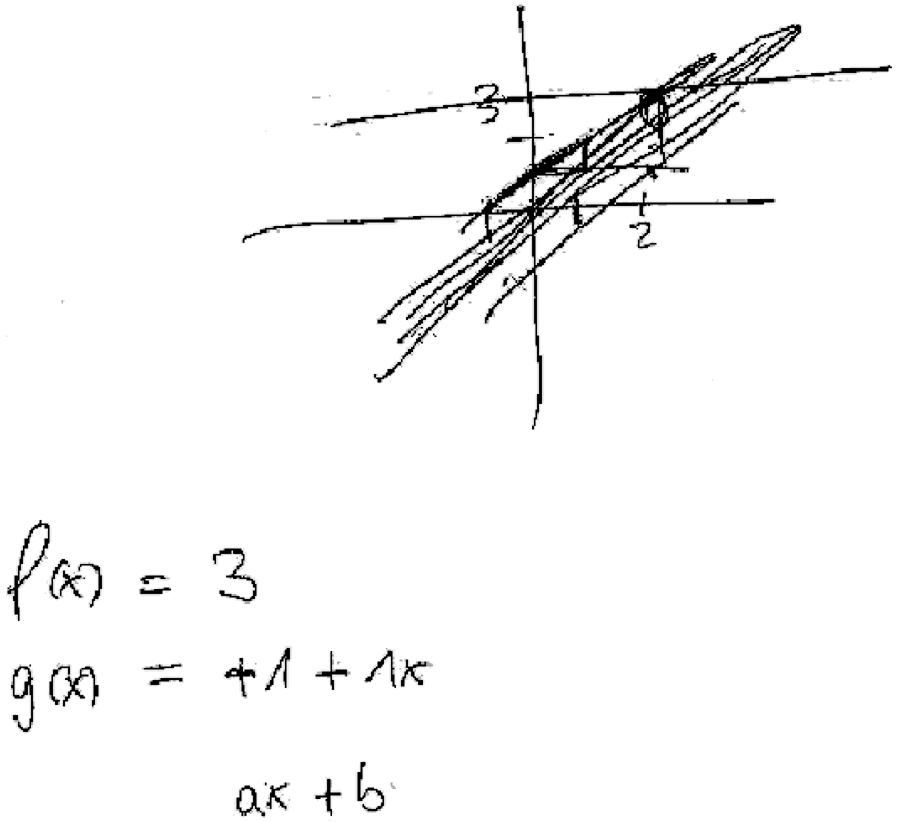


Abbildung 29: Eduards Mitschrift zu Aufgabe 6

148	S:	[Liest Aufgabe 6 vor] Gib zwei beliebige Funktionen an, deren Graphen sich in dem Punkt zwei Drittel schneiden. So. Dann würde ich jetzt erstmal irgendwie, würde mir im Kopf halt ein Koordinatenkreuz machen, das kann ich ja jetzt auch aufzeichnen
149		*Zeichnet Koordinatensystem.*
150	S:	Punkt zwei Drittel, äh zwei drei, also zwei auf dem x, zwei und hier drei. Dann treffen die sich hier.
151		*Zeichnet (2 | 3) ein.*
152	S:	Dann würde ich jetzt einfach das hier nehmen.
153		*Zeichnet eine konstante Funktion y=3 ein.*
154	S:	Upps, war jetzt nicht so gut. Und den hier.
155		*Zeichnet Ursprungsgerade durch (2 | 3).*
156	S:	Und dann gibt's einmal f von x gleich 3. Also so.
157		f(x) = 3
158	S:	Und g von x [Pause].
159		g(x) =
160	S:	Hm, muss ich jetzt. Geh ich jetzt am besten, fang ich den doch hier an.
161		*Zeichnet den Punkt (-1 | 0) und die Funktion y=x+1 ein.*
162	S:	Damit ich drei Schritte, für jeden, für jeden Schritt in x-Richtung einen in y gehen kann. Also bei minus eins fängt der sozusagen an auf der x-Achse, oder hat der Schnittpunkt mit der x-Achse. Und dann minus eins plus ein x.

163		–1 + 1x
164	S:	Und dann ist bei zwei. [Pause] Bei zwei passt es nicht. [Pause] Was hab ich denn jetzt gemacht? [Pause] Keine Ahnung, äh. [Pause]
165	I:	Was heißt jetzt dein minus eins davor?
166	S:	Also bei minus eins, minus eins ist einfach immer, ach das ist falsch. Dann würde er ja hier langgehen.
167		*zeichnet Funktion y=x–1 ein.*
168	S:	Würde er ja einfach, bei zwei würde er bei eins sein. So. Müsste einfach bei plus eins anfangen, so. Plus eins. Dann würde er in zwei Schritten auf drei kommen. Ja.
169		*ersetzt –1 durch +1*
170	I:	Und wenn du jetzt jemandem erklärst, der das noch nie gemacht hat, wie würdest du dem das erklären, was, äh wie man auf so eine Funktion kommen kann?
171	S:	Ja, die erste ist ja irgendwie verständlich. Dass für jeden, für jeden x-Wert, den du hast, egal welcher, kommt immer der y-Wert drei raus. Das heißt, der Graph geht einfach über die 3 auf dem y-Wert drüber. So der zweite, äh [Pause], da musst du ja gucken, dass er ja jetzt sich mit dem in dem x-Wert zwei und y-Wert schneidet, also kann man jetzt irgendeine Funktion nehmen, aber ich habe jetzt die genommen, weil, weil die am einfachsten war. Also ich hab jetzt erst geguckt, okay ich nehm jetzt einfach eine möglichst einfache Funktion, die ähm für jeden, für jeden Schritt, den ich in x-Richtung gehe auch einen in y-Richtung gehe, also äh kann man da sozusagen [Pause] gucken ja. Man kann eigentlich auch im Prinzip runterzählen also von ähm... Wenn man bei drei zwei steht und jetzt einen Schritt in x minus geht, hat man hier, steht man bei x auf eins und bei y auf zwei. Und wenn man bei, dann noch einen Schritt in minus geht, steht man bei x auf null und bei y auf 1. Bei y. Und dann ist man ja schon an der, an der y-Achse. Und das dieses also. Bei Funktionen hast du ja immer a x plus b oder so.
172		ax+b
173	S:	Und b ist ja immer der Schnittpunkt mit der y-Achse, also kann man da ja schon plus eins eintragen, wenn das jetzt Sinn macht, keine Ahnung. Und äh [Pause] ja, a x hatten wir ja gesagt, dass die Steigung immer pro Schritt in x-Richtung einen in y geht, also ein x.
174	I:	Okay. [Abschluss des Gesprächs]

Förderung

Die Division durch einen Bruch ist das Gleiche wie die Multiplikation mit dem Kehrwert.

Zwei einfache Beispiele:

$$\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4}:\frac{5}{1}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\ ,\ \frac{3}{4}:\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{12}{12}=1$$

Zwei allgemeine Beweise:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b}:\frac{c}{d} && = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a}{b} && = x\cdot\frac{c}{d} \quad \mid\cdot d \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a\cdot d}{b} && = x\cdot c \quad \mid : c \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a\cdot d}{b\cdot c} && = x \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\cdot\frac{d}{d}\cdot\frac{b}{b}=\frac{\frac{a}{b}\cdot d\cdot b}{\frac{c}{d}\cdot d\cdot b}=\frac{\frac{a\cdot d}{1}}{\frac{b\cdot c}{1}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Gemischte Brüche wandelt man vor der Division sinnvollerweise um, z. B.

$$4:3\frac{1}{3}=4:(3+\frac{1}{3})=4:(\frac{9}{3}+\frac{1}{3})=4:\frac{10}{3}=4\cdot\frac{3}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

Aufgaben:

1. Überlege dir einfache Anwendungsaufgaben, bei denen für dich einleuchtend ist, dass die Division durch einen Bruch das Gleiche ist wie die Multiplikation mit dem Kehrwert. Beispiel: Wie viele halbe Portionen ergeben drei Ganze?
2. Beweise noch einmal allgemein, dass Division durch einen Bruch das Gleiche ist wie die Multiplikation mit dem Kehrwert. Oben sind zwei Beweise angegeben. Die sollen aber nicht abgeschrieben und auch nicht auswendig gelernt und dann hingeschrieben werden. Sie sollen nachvollzogen/verstanden werden, sodass du den Beweis dann selbstständig aufschreiben kannst.

Florian

Aufgabe 1

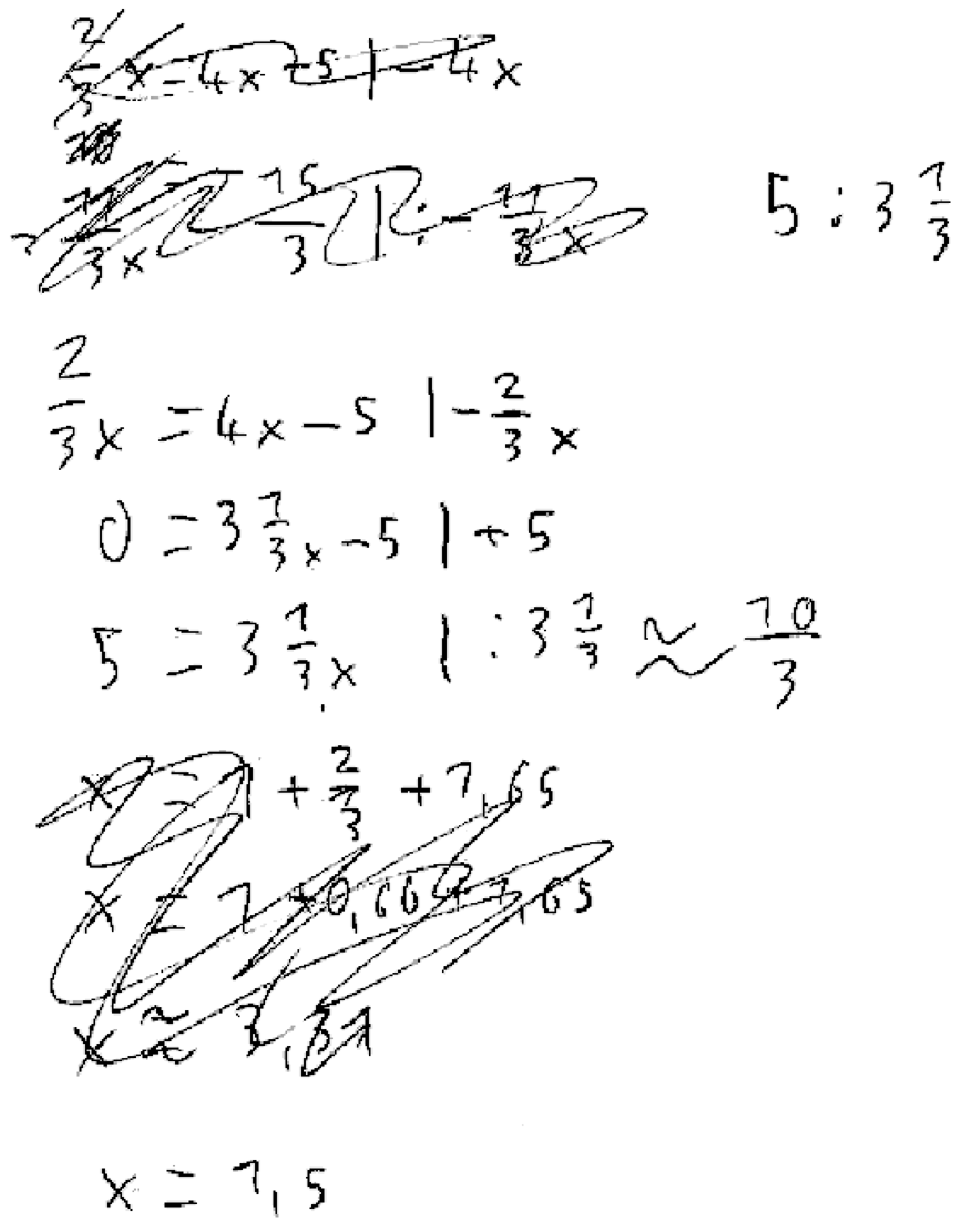


Abbildung 30: Florians Mitschrift zu Aufgabe 1

1	I:	[Einleitung]
2	S:	[Liest Aufgabe 1 vor]. So, wir haben hier ein x auf beiden Seiten, das ist unschön. Deswegen versuchen wir jetzt erstmal, das x auf eine Seite zu bringen. Ähm. Ich schreib erstmal ab.
3		$\frac{2}{3}x=4x-5$
4	S:	Ich würd' dann jetzt, ich würd's dann so machen, dass ich minus äh [unverständlich] ma-

		che minus 4x.
5		| - 4x
6	S:	Dann verschwindet das x auf der einen Seite, auf der anderen haben wir ähm drei ein Drittel x, also sprich, äh. Zehn Drittel, meine ich. [Pause]
7		10
8	S:	Zehn Drittel x, passt das? [Pause] Drei Drittel sind drei Ganze, ja. [Pause] Moment mal. Drei, drei, drei Drittel ist eins. Das heißt neun, das sind elf. [Pause] Elf Drittel, äh. Minus.
9		$-\frac{11}{3}x$
10	S:	So, da bleibt ähm minus fünf übrig, das ist umgerechnet dann minus fünfzehn Drittel. Gemeinsamen Nenner bringen, so.
11		$=-\frac{15}{3} \quad \| :-\frac{11}{3}x$
12	S:	Hm. Das Problem ist jetzt [Pause], wenn ich das jetzt teile, hm, [Pause], wenn ich das jetzt teile, dann [Pause], das seltsames Ergebnis. [Pause] Nee. [Pause] Das gefällt mir nicht. Ich versuch's nochmal.
13		*Streicht alles bisher Geschriebene durch und schreibt.* $\frac{2}{3}x=4x-5$
14	S:	Mach einen anderen Ansatz. Diesmal mach ich es so, dass ich minus zwei Drittel x rechne.
15		$\| -\frac{2}{3}x$
16	S:	Dann hab ich auf der einen Seite null gleich drei ein Drittel x minus 5. Dann rechne ich plus 5.
17		$0=3\frac{1}{3}x-5 \quad \| +5$
18	S:	Dann sollte fünf auf der einen, drei ein Drittel x.
19		$5=3\frac{1}{3}x$
20	S:	Das geteilt durch drei ein Drittel.
21		$\| :3\frac{1}{3}$
22	S:	Jetzt ist das Ergebnis wieder schwer im Kopf zu machen. Eins, zwei Drittel, und dann ein Drittel von fünf. [Pause] Ähm. [Pause] Durch drei ist eins, bleibt 2 übrig. Haben wir noch zwei Drittel.
23		$x=1+\frac{2}{3}+$
24	S:	Und ein Drittel von fünf. [Pause] Hm. Ist circa eins Komma, na, eins Komma, ich mach jetzt eine 1,5. Oder sieben wären das dann. 1,65.
25		1,65
26	S:	Jetzt zusammenrechnen. [Pause] Eins plus zwei Drittel plus 1,65. Jetzt eine Dezimalzahl machen. Zwei Drittel, das sind... [Pause]
27		x = 1
28	I:	Was ist die 1,65?
29	S:	Ähm, das ist ein Drittel von fünf. Ich muss ja fünf noch durch ein Drittel teilen. Das ist circa das, glaube ich. Ja müsste. Hm. Und zwei Drittel als Dezimalzahl, hm, ist. Äh. [Pau-

		se] [unverständlich] Ein Drittel. Ja, das müssten 0,66 ungefähr sein. Wenn ich das so auf-schreibe…
30	I:	+ 0,66 + 1,65
31	S:	… sind das insgesamt, wenn ich das als Dezimalzahl schreibe ist das insgesamt drei, circa, x ist gleich circa drei Komma ähm 3,31 kommt da raus.
32	I:	Also diesen Schritt musst du mir nochmal erklären, wo du da von dem fünf gleich drei ein Drittel x auf x gleich eins plus zwei drittel plus 1,65...
33	S:	Wo, welchen jetzt?
34	I:	Diesen hier.
35	S:	Okay. Ähm, ja wir haben ja, wir machen ja den Bruchstrich mit drei ein Drittel, wir haben drei ein Drittel x, wollen aber nur das einzelne x. Dann müssen wir halt ähm die fünf auch durch drei ein Drittel teilen.
36	I:	Mhm.
37	S:	Das hab ich irgendwie so gemacht. Ich weiß nicht.
38	I:	Wie kamst du auf die einzelnen Zahlen?
39	S:	Eine drei ist ja so in fünf drin, dann hat man noch 2 übrig. Diese zwei, zwei muss nochmal durch 3 geteilt werden. [Pause] Das kann nicht sein. Drei, nein das ist Quatsch, fällt mir gerade auf. [Pause] Da habe ich falschrum gedacht. Die drei Drittel passt, passt einmal rein und dann sind noch ein zwei Drittel übrig, also sprich... Ja, jetzt fällts mir gerade auf, so machen wir es anders.
40		*Streicht die letzten drei Zeilen wieder durch.*
41	S:	Die ähm. [Pause] Die fünf durch drei ein Drittel [unverständlich] einmal passt rein. Ein zwei Drittel übrig, also sprich fünf Drittel. Jetzt müssten wir überlegen, das sind drei ein Drittel als Bruch sind das hatten wir gerade schon, ich glaub schon, das sind zehn, zehn Drittel. Wenn wir noch fünf Drittel übrig haben, ja dann ist das ja nochmal die Hälfte, das heißt, x ist nicht drei Komma drei eins, sondern x ist ähm eins komma fünf.
42		x = 1,5
43	S:	Weil wenn ich fünf durch... Ja, weil die fünf anderthalb mal durch drei Komma ein Drittel geteilt werden kann. Obwohl, das passt nicht ganz, glaube ich. Drei. Zehn Drittel und fünf Drittel übrig. Und wenn wir fünf Drittel durch zehn Drittel teilen, ist das ein halb. Doch, das passt so.
44	I:	Ähm, gut. Dann danke, dann können wir mit der nächsten Aufgabe weiter machen.

Aufgabe 2

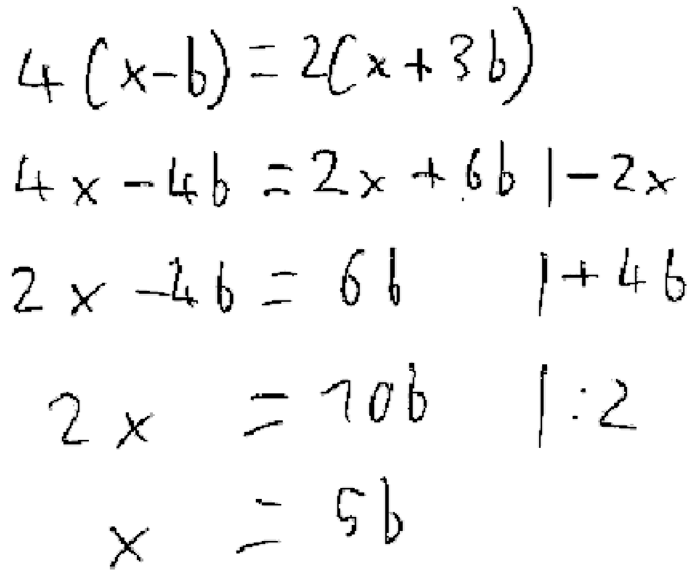


Abbildung 31: Florians Mitschrift zu Aufgabe 2

45	S:	[Liest Aufgabe 2 vor]. Gut, schreiben wir erstmal.
46		4 (x – b) = 2 (x + 3b)
47	S:	So, ich würde als Erstes die Klammern auflösen, das machen wir dann. Vor der Klammer steht 'ne vier, das heißt, wir multiplizieren jetzt mit vier. Haben wir erstmal 4x minus 4b gleich [unverständlich] Da ist eine zwei vor der Klammer, 2x plus 6b. Hm. [Pause]
48		4x – 4b = 2x + 6b
49	S:	Hm. Dann. [Pause] Dann wollen wir wahrscheinlich die Variablen alle zusammen treiben. Hm. [Pause] Machen wir das [unverständlich] minus 2x.
50		| –2x
51	S:	2x minus 4b gleich 6b. Ähm.
52		2x – 4b = 6b
53	S:	[Pause] Plus 4b.
54		| + 4b
55	S:	Sind 2x gleich 10b.
56		2x = 10b
57	S:	Und dann teilen wir durch 2.
58		| :2
59	S:	Und haben x gleich 5b.
60		x = 5b
61	I:	Okay. Bist du mit dem Ergebnis zufrieden?
62	S:	Ich überprüfe nochmal, was ich da geschrieben habe. Minus zwei, ähm. Ja, bin ich.
63	I:	Okay, dann machen wir die nächste Aufgabe.

Aufgabe 3

$$(x-5)^2$$
$$=(x-5)\cdot(x-5)$$
$$=x^2-5x-5x+25$$
$$=x^2-10x+25$$

Abbildung 32: Florians Mitschrift zu Aufgabe 3

64	S:	[Liest Aufgabe 3 vor]. Gut, erstmal schreiben.
65		$(x-5)^2$
66	S:	Jetzt haben wir eine Potenz, hoch zwei, also quasi wird die Klammer mit sich selbst multipliziert. Das heißt man, ich stell mir jetzt eine zweite Klammer vor, das schreibe ich glaube ich sogar, weil es mir dann leichter fällt, zu visualisieren, oder dem Gedankengang zu folgen, weil ich ja alle Elemente miteinander multiplizieren muss.
67		$= (x-5) \cdot (x-5)$
68	S:	Ähm, das nächste erstmal x, x mal x. Dann haben wir erstmal x hoch zwei. Dann x mal minus fünf ist minus fünf x. Dann ähm, dann. x mal x und x minus fünf, jetzt muss noch die minus fünf mit x, dann haben wir wieder minus fünf x und die minus fünf mit der minus fünf multiplizieren, was 25 ergibt.
69		$= x^2-5x-5x+25$
70	S:	Jetzt fasse ich, was ich da aufgeschrieben habe zusammen zu x hoch zwei minus zehn x plus fünfundzwanzig.
71		$= x^2 - 10x + 25$
72	I:	Okay, dann können wir schon weitermachen.

Aufgabe 4

$$7{,}1 : 0{,}83 \approx 8{,}4$$
$$100 : 8{,}4 \approx 11{,}9\%$$
$$7{,}1 \cdot 1{,}12^{t} = 10$$

Abbildung 33: Florians Mitschrift zu Aufgabe 4

73	S:	Damit bin ich auch zufrieden. Aufgabe vier ist eine Textaufgabe. [Liest Aufgabe 4 vor]. Les ich nochmal durch. Auf der Erde leben 7,1 Menschen. Es werden 8,3 Millionen mehr. Stelle eine Gleichung auf. Okay. Hm. [Pause] Das ist ja das mit Wachstum. [Pause] Ich würde als Erstes versuchen zu gucken, wie viel 83 Millionen von 7,1 Milliarden ist. Ähm. Um dann später 'nen, 'ne Gleichung zu finden, wo man dann immer einfach den prozentualen Wert draufrechnet. Hm. Okay. 7,1. Mach ich mal eins durch 0,83.
74		7,1 : 0,83 =
75	S:	Im Kopf. Oh. 1,6, 1,66 mal zwei sind äh 3,32, sind schon vier. Ähm. Vier Komma, ähm, 4,15 ist fünf mal. Jetzt nochmal, nee. 1,66 nochmal drauf, dann hab ich fünf Komma. Pff. Das ist unglaublich schwer. Moment. 1,66, 3,32. Mal zwei das, also die acht [unverständlich]. 6,64. Das passt also acht mal rein und neun mal wär zu viel.
76	I:	Du kannst runden auf eine ganze Zahl.
77	S:	Okay, ähm. [Pause] Jetzt bin ich wieder raus.
78	I:	Entschuldigung.
79	S:	Nein, ist nicht deine Schuld. 3,32. 6,64, ist acht mal. Und dann. Hm, nochmal. Die Hälfte nochmal nehmen, dann hätte man sieben Komma, Komma eins sieben. So, es ist irgendwas knapp unter achteinhalb mal, ich schätze es ist circa 8,4 mal oder so. So.
80		≈ 8,4
81	S:	Was weiß ich denn jetzt? Jetzt weiß ich, wie oft 8,3 in 1,7 reingeht. Ich möchte ja den prozentualen Anteil wissen. Ah ja genau, da kann ich ja, wenn ich Prozent will, kann ich ja hundert durch diese Zahl teilen um herauszufinden, wie viel Prozent das ist. Glaube ich. Versuchen wir's mal.
82		100 : 8,4 =
83	S:	Ja, das sind, erstmal zehn mal, dann haben wir 84. Zehn mal, 11 mal, sind 92,4. Zwölf mal wären dann 100,8. Wenn wir hundert haben. [Pause] Ähm. Das nämlich zwölf Prozent sind dann mehr. Hm. 11,9 circa.
84		≈ 11,9 %
85	S:	Ähm, so. Wir wollen, jetzt ist die Frage, wie wir auf zehn Milliarden kommen, dann würde ich jetzt ähm meinen Grundwert nehmen, 7,1 Milliarden.
86		7,1
87	S:	Ich mach das mal in kleineren Zahlen. 7,1 halt. Mal 1,12, was dann quasi 112 Prozent entspricht. Hm. Und das muss ich jetzt hoch ähm, quasi die Zahl, die die die ähm, Jahreszahl, die Anzahl der Jahre nehmen. Ich weiß das jetzt noch nicht genau, deswegen werde ich das einfach ausprobieren. So, fangen wir mit eins an.
88		$7{,}1 \cdot 1{,}12^{1}$
89	S:	Dann haben wir...
90	I:	Ähm, die Frage war, du solltest nur eine Gleichung aufstellen, du musst sie nicht versuchen zu lösen.
91	S:	Ich muss nur eine Gleichung aufstellen. Oh. Dann machen wir das anders. Dann machen wir 7,1 mal 1,12 hoch äh t. Ist die Variable. Gleich zehn.
92		*Ersetzt die 1 im Exponenten durch t und schreibt:* = 10
93	I:	Okay. Wie würdest du die lösen? Also du musst sie jetzt nicht lösen.
94	S:	Ich würde es ausprobieren. Ich habe, ich habe zwar am Ende des letzten Halbjahres ein Verfahren gelernt, wo man es genau ausrechnen kann, ich weiß das aber nicht mehr. Deswegen würde ich das ausprobieren, bis ich dann circa auf zehn bin.
95	I:	Okay. Aufgabe 5.

Aufgabe 5

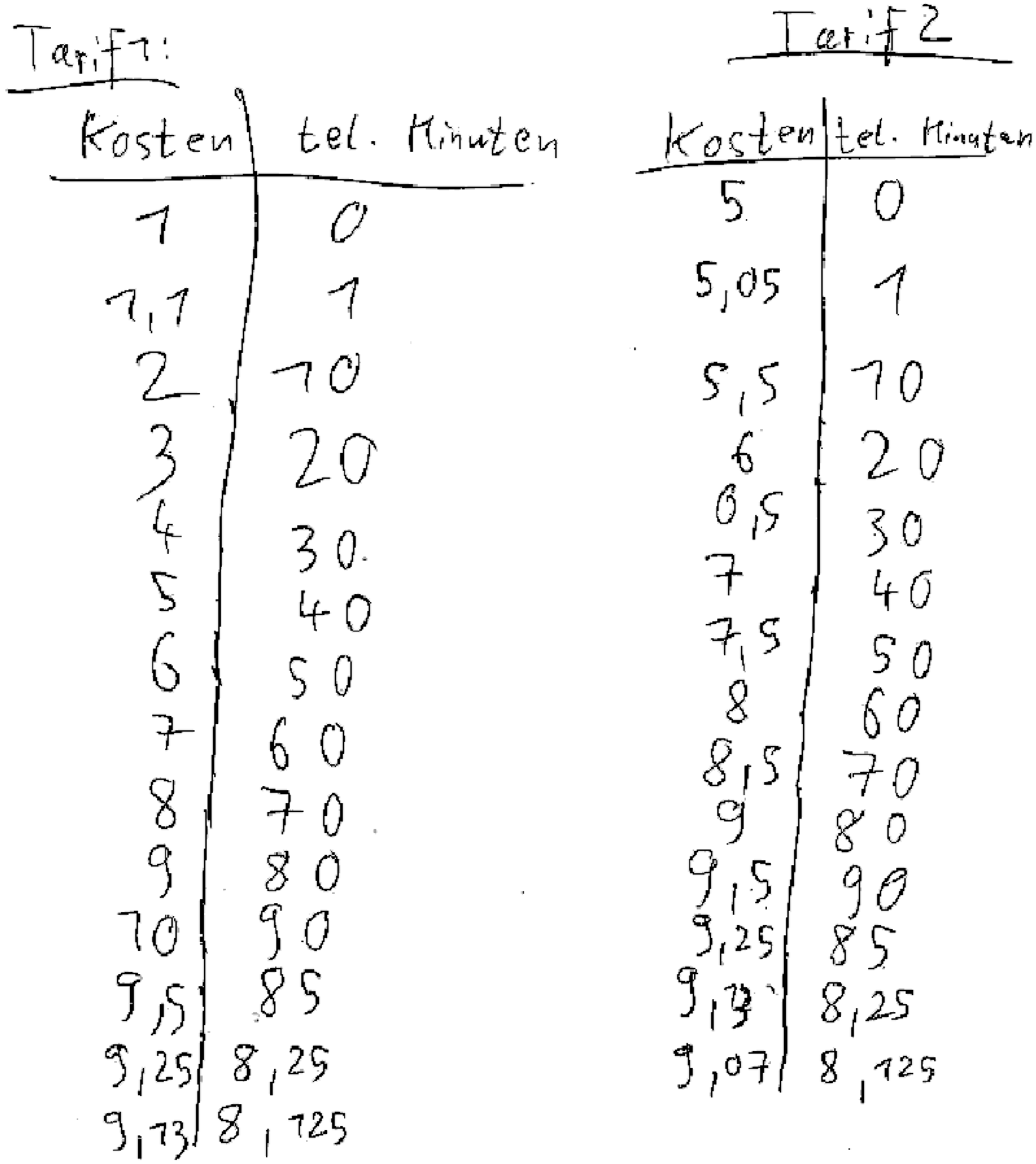


Abbildung 34: Florians Mitschrift zu Aufgabe 5

96	S:	[Liest Aufgabe 5 vor] Gut ähm, nochmal lesen. [Pause] Okay. Ah ja. Okay. Da haben wir einen Tarif, wo die Grundgebühr, nee. Was ist denn hier los? Minutenpreis. Hm? [Pause] Zehn Cent. [Pause] Scheint, einer scheint ja einfach nur teurer zu sein, als der andere.
97	I:	Welcher scheint teurer zu sein?
98	S:	Äh, der. Ach nee, ach nee, ich hab's falschrum gelesen, das tut mir leid. Nein, das war Blödsinn.
99	I:	Was hast du denn gelesen?
100	S:	Ich hab, ich hab's so rum gelesen [zeilenweise statt spaltenweise], das ist ja Quatsch. Nee, es ist, es ist wie ich's erwartet hab', dass einer 'ne höhere Grundgebühr hat und dafür

		dann mehr kostet, wenn man dann telefoniert, also. Ähm. So, für welche monatliche Gesprächsdauer? Daraus ergibt sich ja, dass wenn man wenig telefoniert, dass sich dann der mit der geringen Grundgebühr lohnt und der, äh, und mit dem hohen Minutenpreis. Und wenn man viel telefoniert, der mit dem niedrigen Minutenpreis. Aber ich soll hier, 'ne ähm, ich soll hier, für 'ne bestimmte monatliche Gesprächsdauer das machen?
101	I:	Nee, du sollst rausfinden, für welche es günstig ist und für welche teuer. Also du hast jetzt gesagt, für die einen, bei wenig Telefonieren ist es bei dem einen günstig, bei viel Telefonieren ist es bei dem anderen günstig. Jetzt ist die Frage, äh alle Gesprächsdauern herauszufinden, wofür Tarif 1 günstiger ist und wo Tarif 2 günstiger ist.
102	S:	Achso okay, ach genau, irgendwann wird sich das ja treffen. Ähm [Pause]. Dann machen wir jetzt erstmal 'ne Rechnung für Tarif 1.
103		Tarif 1:
104	S:	Das ist dann. Da können wir eigentlich, da können wir eigentlich 'ne Dreisatztabelle machen. Müssen wir dann machen mit Kosten und dann ähm, hm, telefonierten Minuten.
105		*Erstellt Tabelle mit den Spalten „Kosten" und „tel. Minuten".*
106	S:	Das ist dann bei 0 zum Beispiel, ja. Ja, ist Tarif 1, ne, also ein Euro. Ja. Ein Euro. Und dann schon ab einer Minute ist es dann eins komma ein Euro.
107		*Schreibt in die Tabelle:* 1 | 0 1,1 | 1
108	S:	Es muss ich mal gerade überlegen, ich will ja rausfinden, wo die sich treffen. Hm. Dann würde ich erstmal. Dann würde ich erstmal zum, äh, zwei Tabellen halt machen um dann ein bisschen Vergleich zu bekommen. Das heißt, ich mach jetzt einfach mal 10 telefonierte Minuten, äh, da sind das schon... Ja hundert Cent sind ein Euro, also zwei Euro.
109		2 | 10
110	S:	Das lass ich erstmal so stehen und mach jetzt erstmal die nächste Tabelle, um ungefähres Bild zu kriegen, in welche Richtung es geht. Also dann mach ich 'ne neue Tabelle mit Tarif 2. Kosten, telefonierte Minuten.
111		Tarif 2 *Erstellt eine zweite Tabelle mit den Spalten „Kosten" und „tel. Minuten"*
112	S:	Ähm. Ja. Hm. Ja, es beginnt bei fünf Euro. Null und dann eins sind dann 5,05 Euro quasi. Und bei zehn sind's 5,5 Euro.
113		5 | 0 5,05 | 1 5,5 | 10
114	S:	[unverständlich] Dann ist es nach zehn Minuten immer noch deutlich teurer bei Tarif 2. Und deswegen machen wir jetzt einfach mal zwanzig. Und dann haben wir wieder zehn, ja, dann haben haben wir wieder einen Euro mehr hier.
115		2 | 10 [in Tabelle für Tarif 1]
116	S:	Zwanzig haben wir hier, ja das sind. Sind nicht mehr fünfzig Cent, sondern schon ein Euro mehr.
117		6 | 20 [Tarif 2]
118	S:	Das heißt nach zwanzig Minuten telefonieren ist es bei einem zwei Euro teurer geworden, bei Tarif 1, beim anderen nur einen teurer, Euro teurer. Hm. Jetzt kann ich es eigentlich schon ausrechnen, aber ich ähm, blick's gerade nicht so. Hm. Ich glaube, ich werde es einfach durch Ausprobieren aufschreiben... Sechs.
119		4 | 30 [Tarif 1] 5 | 40 6 | 50

120	S:	Und dann bei dem anderen auch. Äh ja.
121		6,5 | 30 [Tarif 2] 7 | 40 7,5 | 50
122	S:	Hm. Das heißt, nach... Äh ja, nach 50 Minuten ist Tarif 2 immer noch teurer, das heißt wir gehen noch ein paar, in Zehnerschritten noch ein paar Minuten weiter.
123		7 | 60 [Tarif 1] 8 | 60 [Tarif 2] 8 | 70 8,5 | 70
124	S:	Und jetzt sieht es immer noch so aus, als müssten wir weiter gehen.
125		9 | 80 [Tarif 1] 9 | 80 10 | 90 9,5 | 90
126	S:	Ja. Ähm. [Pause] Ja. Und nach 90 Minuten ist äh, nach 90 Minuten Telefonierzeit ist Tarif 1 teurer geworden, dann. Das heißt, ähm. Soll ich einen Antwortsatz noch schreiben?
127	I:	Nee, aber kannst du aussprechen.
128	S:	Das heißt ähm für die Frage „Für welche monatliche Gesprächsdauer ist Tarif 1 und für welche ist Tarif 2 der günstigere Tarif?" Äh, Tarif 1 ist bis zu einer Gesprächszeit von 90 Minuten der günstigere Tarif und dann wird's teurer.
129	I:	Okay. Genau bei 90 Minuten?
130	S:	Hm. [Pause] Ähm. [Pause] Nee, das ist nicht genau. Stimmt. Das sind wahrscheinlich 85 Minuten. Ich probiere, versuch das gerade. Das sind dann ja nicht zehn, sondern erst 9,5. Und hier bei 85 sind es 9,25. Hm.
131		9,5 | 85 [Tarif 1] 9,25 | 85 [Tarif 2]
132	I:	Woran würdest du es erkennen, dass es, wenn du jetzt genau den Wert da hättest, wo die sich überschneiden?
133	S:	Was würde ich erkennen?
134	I:	Oder äh, du suchst doch jetzt die Minutenzahl, wo das, ähm. Nee, was suchst du für eine Minutenzahl?
135	S:	Ich suche die Minutenzahl, wo es teurer wird.
136	I:	Okay. Und woran würdest du das an deiner Tabelle erkennen?
137	S:	Äh, naja, ich würde die beiden Tabellen vergleichen und würde dann äh, also immer, immer den gleichen Minutenwert vergleichen und würde dann sehen, dass es, dass sich ja, das zeichnet sich ja ab, dass Tarif 1 erstmal billiger ist und dann ist es irgendwann nicht mehr so im Vergleich.
138	I:	Okay.
139	S:	Ja gut, ich soll den genauen Wert jetzt herausfinden, oder?
140	I:	Wenn du das noch schaffst, wär gut.
141	S:	Ähm. Na, dann müssten wir jetzt. Äh. Ist immer noch 0,25 Unterschied. Ich versuch nochmal, ein bisschen mehr ins Detail zu gehen mit 8,25. Dann haben wir nämlich erst, eins komma zw... Ja, das gibt's ja nicht bei Euro, das heißt das müssen 9,13 hier sein.
142		9,25 | 8,25 [Tarif 1] 9,13 | 8,25 [Tarif 2]
143	S:	Hm. Das gleicht sich noch mehr an. [Pause] Hm. Aber ich möchte, wenn ich jetzt noch einen weiter gehe.
144		9,13 | 8,125 [Tarif 1]
145	S:	Tarif 2. Hm. Die Hälfte nochmal, 1,25 die Hälfte von 1,25 ist 6, äh 0,625, das heißt. Nee, Moment, das sind dann. Ah das ist dann 6.
146		9,07 | 8,125 [Tarif 2]
147	S:	Das müssten dann. [Pause] Ja. Den genauen Wert krieg ich dann wohl nicht mehr.

148	I:	Okay, dann können wir mit der nächsten Aufgabe weiter machen.

Aufgabe 6

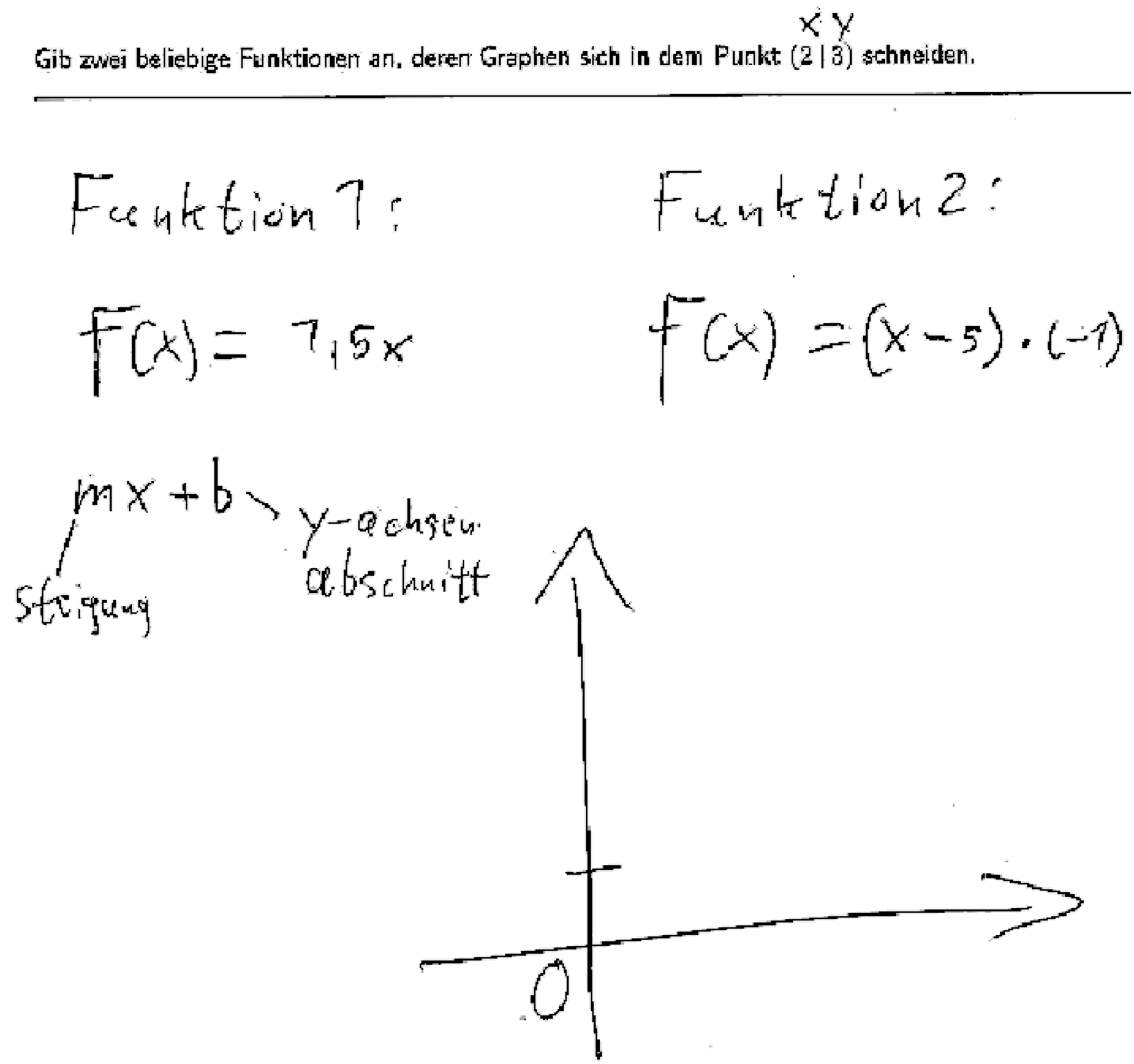


Abbildung 35: Florians Mitschrift zu Aufgabe 6

149	S:	Okay. [Liest Aufgabe 6 vor]. Hm. Zugegebenermaßen, das ist mir immer schwer gefallen. Mit Graphen. Hm. [Pause] [unverständlich] Die müssten das beiden beinhalten. Diesen Punkt zwei drei. Das heißt ja, dass wenn x, der x-Wert zwei ist, muss der y-Wert drei sein.
150		*Schreibt über (2 | 3) in der Aufgabenstellung:* x y
151	S:	Hm. [Pause] Wenn die Graphen sich schneiden müssen, dann müssen, ja dann muss dieser Punkt in beiden Funktionen vorkommen. Ähm. Ja gut. Okay, ich werde erstmal eine aufstellen und gucken.
152		Funktion 1:
153	S:	Die erste Funktion wäre dann, das wäre dann f von x gleich 1,5x würde ich sagen.
154		F(x) = 1,5x

155	S:	Weil wenn man dann da den Wert zwei angibt, dann ist das Ergebnis drei. Und das passt dann ja. Nur jetzt die zweite. [Pause] Hm. [Pause] Hm.[Pause] [unverständlich]
156		Funktion 2:
157	S:	Hm. [Pause] Nein, das klappt nicht. Also ich dachte gerade an etwas mit, äh, das man das auf den negativen Wert bringt und dann, obwohl, ich versuche das mal. f von x gleich, ähm, x, und eine Klammer. In der Klammer steht x minus 5. Und dann außerhalb der Klammer mal minus 1.
158		$F(x) = (x-5) \cdot (-1)$
159	S:	Dann müsste ja, wenn man da zwei einsetzt, dann, ja dann müsste da minus drei rauskommen und dann weil ich nochmal mal mi... äh mal minus eins habe, ist das dann drei. Das heißt, wenn man x eingibt, ist wieder der Wert drei. Das heißt, diese müssten sich glaube ich am Punkt zwei drei schneiden, diese beiden Funktionen. Also f von x gleich 1,5x und f von x gleich Klammer auf x minus 5 Klammer zu mal minus eins.
160	I:	Okay, kannst du die grob skizzieren?
161	S:	Grob skizzieren, oh. Ähm, ich kann es versuchen, aber das ist wirklich schwer für mich. Dann machen wir erstmal ein Koordinatensystem hier.
162		*Zeichnet Koordinatensystem.*
163	S:	[unverständlich] Moment mal. Ähm. [Pause] Ich muss gerade überlegen. [Pause] Ich muss gerade überlegen, was, was nochmal in der allgemeinen Form, äh, was angibt.
164	I:	In welcher allgemeinen Form?
165	S:	Äh in der, wie heißt das, in der allgemeinen Gleichung. Ich meine, das war m x plus b, wo m die Steigung ist, x der x-Wert und b der y-Achsenabschnitt, meine ich.
166		mx + b Steigung y-achsenabschnitt
167	S:	So, das würde ja heißen, bei der ersten, dann wären 1,5, 1,5 vor dem x. Das heißt, ähm, die Steigung ist 1,5. Hm, ich fürchte, ich kann das nicht kompetent machen mit dem Skizzieren. Also das sind alles so Ansätze, aber irgendwie krieg ich da keinen, glaube ich.
168	I:	Okay. [Abschluss des Gesprächs]

Förderung

In den Geogebra-Dateien ist jeweils eine Funktionsgleichung angegeben und der dazugehörige Graph eingezeichnet. Die Funktionen enthalten jeweils zwei Parameter, die mit Schiebereglern verändert werden können.

Überlege, wie sich der Graph verändert, wenn du den Wert der Parameter an den Schiebereglern einstellst. Verschiebt sich der Graph nach oben oder nach unten? Verschiebt sich der Graph nach links oder nach rechts? Wird der Graph in x- oder y-Richtung gestreckt? Und so weiter.

Versuche zunächst, die Aufgabe ohne Hilfsmittel zu beantworten. Wenn das nicht gelingt, kannst du z. B. eine Wertetabelle anfertigen. Benutze erst dann die Schieberegler und vergleiche, ob deine Vorhersage richtig war. Wenn nicht: Versuche nachzuvollziehen, warum sich der Graph auf die Weise ändert, wie er es tut. Worin lag der Fehler bei deiner Überlegung?

Die eingezeichneten Funktionen sind:

- $f(x) = ax+b$
- $f(x) = ax^2 + b$
- $f(x) = a(x - b)^3$
- $f(x) = -(x+a)^2 + b$
- $f(x) = a(x-b)^2 + b$
- $f(x) = a \cdot \sin(x+b)$
- $f(x) = \sin(a \cdot x)+b$

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel genutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind, und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Bielefeld, den